دفتر احصاء

2017

إعداد الطالبه : ربى عدنان

الدكتور : احمد عبدالله

ملاحظة : أي خطا داخل الدفتر انا المسؤوله عنه وليس للدكتور اي علاقه بذلك

الساعات المكتبية ← ن : ١٢,٣٠ - ١,٣٠
د. أحمد عبدالله
ح.ث : ١١ - ١٢

* **Nominal Data** : Name & classes or categories are given.

ex Faculty & astudent → science (إنو كل فئة (class) أعطيتها اسم)
→ Engineering
→ Art.

* **Ranked Data** : Categories imply some order or relative position but neither the difference الفرق or ratio النسبة has ameaning. (مافي معنى للفرق ولا للنسبة)

ex Academic level & astudent. المستوى الأكاديمي

* **Interval Data** : The difference الفرق has ameaning but the ratio is meaningless. (الفرق إله معنى بس النسبة ما إلها معنى)

ex Commulative average & astudent. نفس الاشي الأقلام.
المعدل التراكمي

* **Ratio Data** : has meaningful order, zero, defference and Ratio.

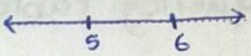
ex number & years the student has been in the university. (الفرق والنسبة إلهم معنى) ونفس الشي درجة الحرارة

(1.2) statistical Data

(1.3) types & Data :

A 1) Quantitative → Discrete ex 40, 41, 42, 0.00, 0.02, 0.04 (كمية الفصل واضحة)
بيانات كمية
منفصل

→ Continuous ex



(عدد لا نهائي من الأرقام)
(مستحيل نفصلها)

2) Qualitative
بيانات نوعية

B 1) Nominal Data 3) interval Data ex (-3, 5]

2) Rank Data 4) Ratio Data

C 1) Univariate (مهتم بمتغير واحد فقط)
بتحكم في التجربة متغير واحد

2) Multivariate (أكثر من متغير)

(1.4) collecting Data :

1) population.
2) sample.
3) Historical Records.

* مو ضروري المجتمع يكون عدد كبير

* إذا بنحكي عن symmetry
← لازم آخذ نفس العدد والتوزيع حولين الوسط.

(1.5) Frequency Table (Distribution) :

*(1.5.1) : Frequency table & discrete data :

ex A, C, B, B, C, B, F, D, C

class		Frequency
A	/	1
B	///	3
C	///	3
D	/	1
F	/	1

* مع إنها Qualitative ، بس أصل البيانات أرقام ، معاني.

* (1.5.2) stem and leaf → محذوف ←

* (1.5.3): Frequency Table of continuous Data:

20 Data ex 14, 12, 11, 19, 9, 8, 7, 16, 11, 13, 2, 4, 10, 8, 15, 16, 13, 10, 6, 7

constructe afrequency table of 4 equality length classes ?

- نحدد ال Range (max-min)

$19 - 2 = 17$

- class length = Range / # of classes

$= \frac{17}{4} = [4.25] \approx 5$ (upper ceiling)

* لأنه لو أخذنا 4 ← آخر اشي راح يضل عم بدون تصنيف.

	class		Frequency
[2,7)	2-6	///	3
[7,12)	7-11	~~////~~ ////	9
[12,17)	12-16	~~////~~ //	7
[17,22)	17-21	/	1
			total = 20

* لو العلامات من 20 غلط أحط 21 ويبدأ من 1، بس هون ما حدد سقف.

* غير دقيق، بضيع جزء من المعلومات، مثلاً كم أعلى علامة؟ ما بعرف!!

ع: إنه أرقام منفصلة، بس كتابتها على شكل فترات مع اعطي معنى للأعشار فكأنها متصلة.

* لو ما أعطى عدد الفئات، لازم أنا أحدد العدد المناسب ⇐

* sutable # of class = $[\sqrt{K}]$, while K is # Data

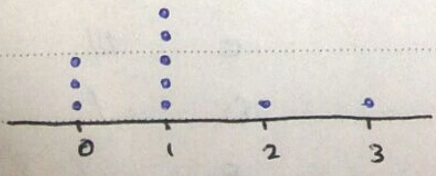
↳ ex $[\sqrt{20}] = [4,47] = 5$

(1.6) Graphical presentation of Data:

*(1.6.1): Discrete Data:

① Dot plot of data

ex 3, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 1



كم مرة تكررت.. ولازم يكون البعد بين النقاط متساوي.

* Discrete Data: → بدون فئات ←

① Dot plot of data

② line diagram ⇒ relative freq بنحتاج $\left(\frac{f}{\Sigma f}\right)$

③ Bar chart (أعمدة منفصلة) ⇒ relative freq. بنحتاج

④ Pie chart ⇒ محذوف

* Continuous Data: → مع فئات ←

① Histogram (أعمدة متصلة) ⇒ actual class بنحتاج

② Freq. polygon ⇒ class center (mid point)

③ commulative freq. curve → act. upper limit
↳ comm freq

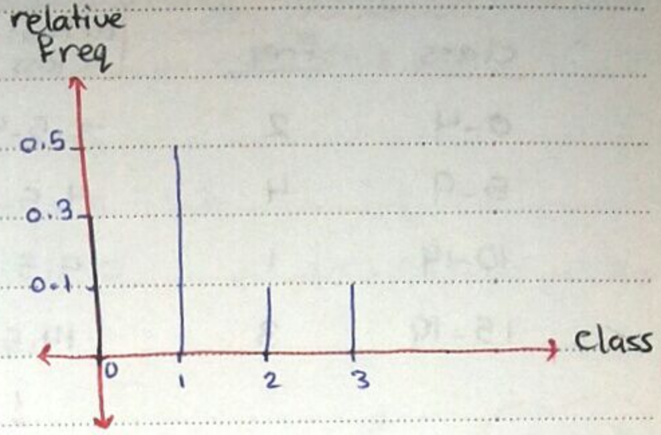
④ Bivarite date ⇒ محذوف

② line diagram :

[relative freq يعني لازم التكرار النسبي]

ex 3, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 1

class	freq.	relative freq
0	3	3/10 = 0.3
1	5	5/10 = 0.5
2	1	1/10 = 0.1
3	1	1/10 = 0.1
	total = 10	total = 1.0



③ Bar chart :

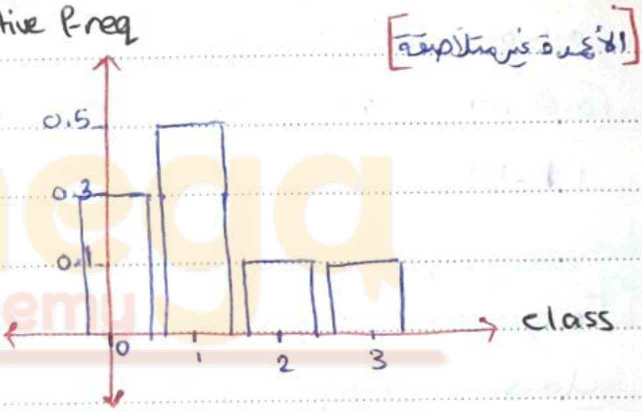
ex 3, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 1

class	freq.
0	3
1	5
2	1
3	1

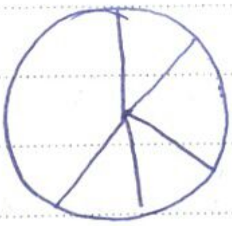
*بيكون الفراغات بين الاعمدة نفسها بمقدار تقريبا (0.1)

ولازم يكون نفس لون الأعمدة.

[الأعمدة غير متلاصقة]



④ Pie chart :



→ محذوف ←

لازم أستخدم المنقلة

مقدار الزاوية بكون حسب التكرار.

* class length = $\frac{\text{max} - \text{min (Range)}}{\# \text{ of classes}}$
* class length = upper limit − lower limit + a.u
* first class = $\underset{\downarrow \text{ (lower limit)}}{\text{min}}$ — $\underset{\downarrow \text{ (upper limit)}}{\text{min} + \text{length} - \text{a.u}}$
* class center (mid point) = $\frac{\text{upper limit} + \text{lower limit}}{2}$
* relative freq = $\frac{\text{freq}}{\Sigma \text{ freq}}$
* comm. freq = مجموع تكرار الفئات السابقة + تكرار الفئة
* actual lower limit = lower limit − (0.5 * a.u)
* actual upper limit = upper limit + (0.5 * a.u)

7, 30, −3 → a.u = 1 / 30.7, 5.2 → a.u = 0.1
7.02 → a.u = 0.01

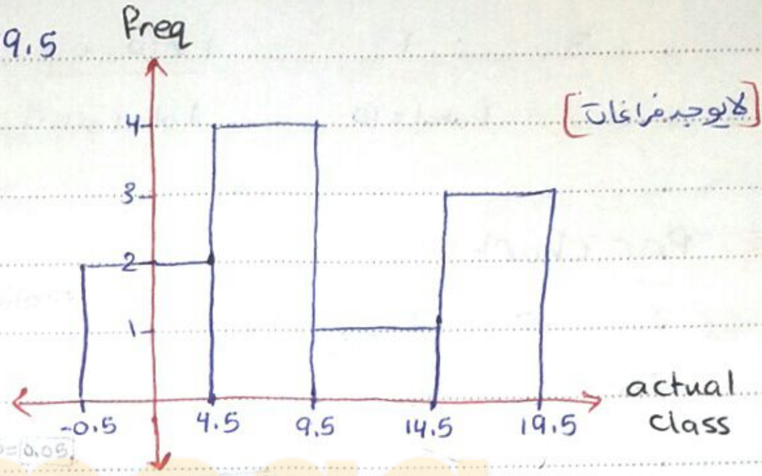
*(1.6.2) : continuous data:

① Histogram :

class	Freq.	actual class
0-4	2	-0.5-4.5
5-9	4	4.5-9.5
10-14	1	9.5-14.5
15-19	3	14.5-19.5

* لازم أتعامل مع الفئات الفعلية

يعني لازم أشيل الفجوة بين الفئات



لايوجد فراغات

* مش شرط الـ actual class يكون 0.5

ex

class	act. class
0.1-0.5	(0.05-0.55)
0.6-1.0	0.55-1.05
1.0-1.5	

لازم آخذ إلي بالنص بينهم.

↳ $\frac{0.5+0.6}{2} = 0.55$ / $0.55-0.5=\boxed{0.05}$

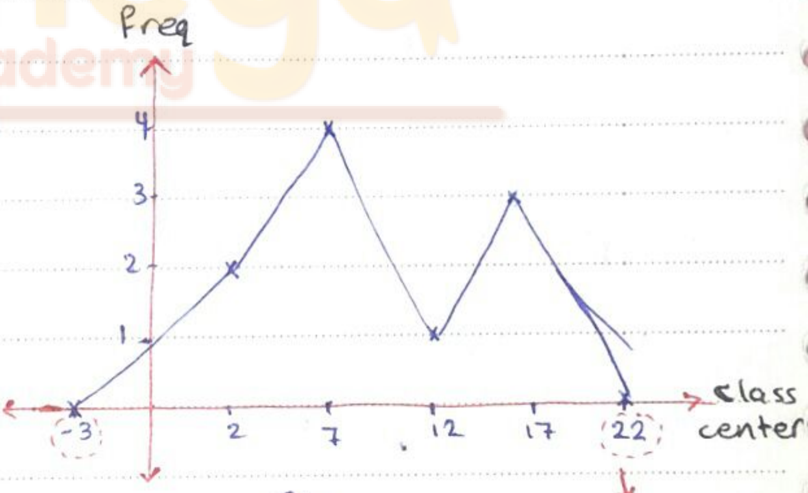
↳ $0.1-\boxed{0.05}=0.05$ / $1.0+\boxed{0.05}=1.05$

$0.6-\boxed{0.05}=0.55$ /

لازم يكون الشكل مضلع مغلق.

② Frequency polygon :

class	Freq	class center
0-4	2	$\frac{0+4}{2} = 2$
5-9	4	7
10-14	1	12
15-19	3	17



* أخذت -3 و 22 لأنه المسافة بين الفئات = 5 (مراكز)

فبطرح 5 وبضيف 5 (← وهدول تكرارهم صفر).

* عشان بسكّر الشكل، باخذ فئة قبل و مركز فئة بعد (مركز)

لاتنسى إغلاق الشكل من الطرفين

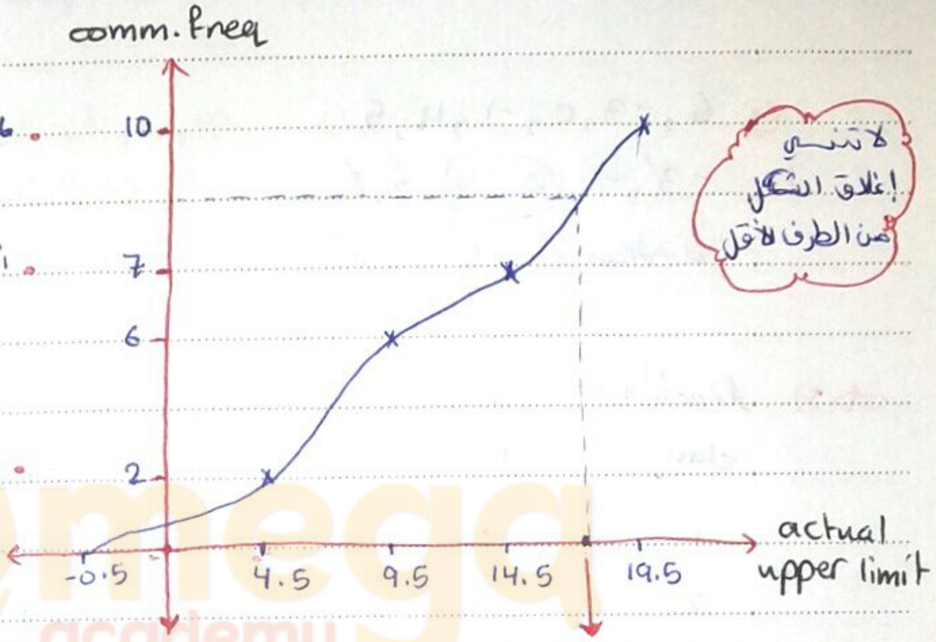
تراكمي. منحني act. class منتبعو ن

③ Commulative Frequency curve:

class	freq	actual upper limit	commulative freq
0-4	2	4.5	2 → كم الـ 4.5 كم مشاهدة
5-9	4	9.5	6
10-14	1	14.5	7
15-19	3	19.5	10

* تراكمي يعني بدي أشوف كل إلي كمه

- لما آخذ أقل من 4.5 بيطلع معي 0.5- وهو صفر comm Freq.
- أما لما آخذ أعلى من 19.5 سواء 24.5 أو 29.5 .... راح يضل comm freq = 10 فما برسمه
- يعني ما برسم اشي بعد أعلى مشاهدة ، برسم قبل أقل ويغلق الشكل من الأقل.



لا تنسى إغلاق الشكل من الطرف الأقل

ex. كم طالب علامتهم 17 أو أقل؟ = تقريباً ٩ / كم طالب علامتهم 17 أو أكثر؟ = ١

④ Bivariate Data: → محذوف ←

* line diagram → x : class
  y : relative freq
* Bar chart → x : class
  y : relative freq
* Histogram → x : actual class
  y : freq.
* Freq. polygon → x : class center
  y : freq
* comm. freq. curve → x : actual upper limit
  y : comm. freq

مهم

(1.7) Descriptive statistical Measures:

* (1.7.1) : Measures of Location:

[A] Row Data: بيانات الخام

⇒ 1) Arithmatic mean: الوسط الحسابي $(\bar{x})$

ex -1 , 4 , 2 , 3

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{-1+4+2+3}{4} = \boxed{2}$$

$$\frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عددها}}$$

⇨ 2) Median: الوسيط

ex 4, -1, 0, 5, 6, 2, 0

* يرتب ترتيب تصاعدي (يفضل) ويحذف الكبير مع الصغير (يمين ويسار)

↳ $-\cancel{1}, \cancel{0}, \cancel{0}, \boxed{2}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}$

↓ Median

• لو الوسيط من العلامات:

↳ هي العلامة إلي كتيها نص الطلاب وفوقيها نص الطلاب

ex 6, -3, 0, -1, 4, 5

↳ $-\cancel{3}, -\cancel{1}, (0, 4), \cancel{5}, \cancel{6}$

$$\text{Median} = \frac{0+4}{2} = \boxed{2}$$

⇨ 3) Mode: المنوال (القيمة الأكثر تكراراً)

class	freq
1	2
2	(3)
5	1
6	1
7	4
8	3
10	2
11	2
14	5
15	1

* المنوال → مطلق (عالمي) absolute
→ محلي local

* لو بدنا نطلع (abs.) بكون → mode = 14 (الأكثر تكراراً)
مش (5)

هاد المطلوب هنا ↙ * لو بدنا نطلع (local) مشوف إلي قبلها والي بعدها

↳ • هل (3) أكبر من إلي قبلها والي بعدها؟!
آه → اذن mode = 2

• هل (1) أكبر من إلي قبلها والي بعدها؟!
.... ✗

• هل (4) أكبر من إلي قبلها والي بعدها؟!
آه → mode = 7

⇨ mode 1 = 2 (طلع عنا ٣ منوالات.)
mode 2 = 7
mode 3 = 14

[(أي للأرقام الموجبة بأخذ الجزء الصحيح)]

⇒ 4) percentiles :

أكبر عدد صحيح (يعني بأخذ العدد الأقل)

- $100p^{th}$ percentile = $\begin{cases} X_{[np]+1} & , np \text{ is not integer} \\ \dfrac{X_{np}+X_{np+1}}{2} & , np \text{ is integer} \end{cases}$

rule

عدد صحيح (لا يوجد أعشار)

- n → عدد المشاهدات (sample size نفسها) / - p → النسبة

ex 4, -1, 3, 0, 1, 2, 1, 5, 6, 7, 6, 10 (12 مشاهدة)

① Find The 35th percentile? (P_{35} كم من)

ترتيب تصاعدي

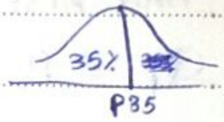
- -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 10

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

x_1 ↓ يعني المشاهدة الأولى

35% بالمنطقة

نهاي المنطقة



السؤال يعني :: إنو شو هي العلامة لي

تحتيها 35% من الطلاب ؟!

- n = 12 - p = 0.35
- np = 12 * 0.35 = 4.2 → not integer ⇒ إذن سنستخدم القانون الأول.
- $P_{35} = X_{[np]+1} = X_{[4.2]+1} = X_{4+1} = X_5 = \boxed{2}$

أكبر عدد الصحيح

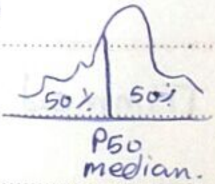
- [4.9] = 4
- [4.1] = 4
- [4] = 4

② Find the median?

إذن الـ median هو عبارة عن percentile

بنسبة 50%

- P_{50} = median.
- np = 12 (0.50) = 6 → integer



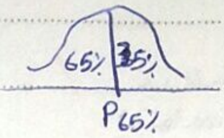
- $P_{50} = \dfrac{X_{np}+X_{np+1}}{2} = \dfrac{X_6+X_7}{2} = \dfrac{3+4}{2} = \boxed{3.5}$

③ Find the 65th percentile ?

- $np = 12(0.65) = 7.8$ (not integer)
- $P_{65} = x_{[np]+1} = x_{[7.8]+1} = x_{7+1} = x_8 = \boxed{5}$

or بالاستفادة من الفرع الأول من السؤال.

من تحت x_5 إذن $= P_{65} = 5$
من الأكبر:



④ Find first quartile ?

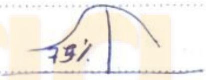
$Q_1 = P_{25}$

$np = 12(0.25) = 3 \rightarrow$ integer ..... تكمل الحل.

⑤ Find 3rd quartile ?

$Q_3 = P_{75}$

تحتيه ٣ أرباع المشاهدات.



⑥ Find second quartile ?

$Q_2 = P_{50} =$ median.

5) Trimmed Mean → محذوف ←

6) Winsorized Mean → محذوف ←

B) Grouped Data:

1) Mean:

ex

class	f_i Frequency	x_i class center	$x_i * f_i$
1-5	2	3 $\frac{1+5}{2}$	2 * 3 = 6
6-10	3	8	24
11-15	4	13	52
16-20	1	18	18
	total = 10		total = 100

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{100}{10} = 10$$

#

2) Mode:

ex

class	Frequency
1-5	2
6-10	3
11-15	4
16-20	1

(الأكثر تكراراً)

⇒ • Modal class : 11-15

• mode = $\frac{11+15}{2}$ = 13

* هنا ال mode هو نقطة الوسط mid point للفئة الأكثر تكراراً (=

ملاحظتي * هون بضلني أشتغل على (actual upper limit & comm. freq.)

median & percentile

(np)

3) Median and percentiles:

ex

class	freq.	actual upper limit	comm. Freq.
1-5	2	5.5	2
6-10	3	10.5	5
11-15	4	15.5	9
16-20	1	20.5	10
	n = 10		

$$①\ \left.\begin{matrix} 10.5 \\ P_{75} \rightarrow ÷ \\ 15.5 \end{matrix}\right) - ② = ② - \left(\begin{matrix} 5 \\ ÷ \leftarrow 7.5 \\ 9 \end{matrix}\right) - ①$$

1) Find the 75th Percentile ? $P_{75} = Q_3$

• $np = 10(0.75) = 7.5$ • الطالب الّي ترتيبه 7.5، قيمته 75%

• $\frac{P_{75} - 10.5}{15.5 - 10.5} = \frac{7.5 - 5}{9 - 5}$ • 7.5 أقرب لـ 9 من 5

فلازم الجواب أقرب لل 15.5

$\frac{P_{75} - 10.5}{5} = 0.625 \longrightarrow P_{75} = 13.62$

#

2) Find the Median? (P_{50})

- $np = 5$ → موجودة.. إذن لا داعي للنسبة والتناسب. ($np = \frac{50}{100} * 10 = 5$)

- median = 10.5

ممكن يطلب عدد المشاهدات (observation)

3) Find the percentage & students whose grades are above 12?

act. up. limit	comm. freq
5.5	2
10.5	5
12 →	← x
15.5	9
20.5	10

- $\frac{12-10.5}{15.5-10.5} = \frac{x-5}{9-5} \longrightarrow x = 6.2$

- $\frac{x}{n} = \frac{6.2}{10} = 0.62$ هذا الأقل

$np = x$
$p = \frac{x}{n}$

$.62|$ %

$\Rightarrow 1 - 0.62 = 38\%$

---

* (1.7.2) Measurment of Variation: مقاييس التشتت

A) Raw Data:

1) Range:

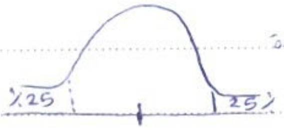
ex 6, -1, 0, 3, 4

Range = 6 - -1 = 7
Max - min

sample

2) Interquartile Range (IQR):

$IQR = Q_3 - Q_1$



- الـ Data في بداية الربع الأول واللي فوق الربع الثالث بنعتبرها شاذة
- ↲ فبنهتم بالمنطقة إلي بالوسط.

الانحراف المعياري

3) Standard Deviation:

- Population (σ) $= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{n}}$ ↘ mean

- sample (S) $= \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ ↘ mean

class center

- S always (+ve)
- S = 0, when all the data is equal → $(x - \bar{x}) = $ zero

ex 4, -1, 0, 5 (sample)

$\frac{4+-1+0+5}{4} \leftarrow \bar{x} = 2$

- كلما زاد البعد بين العلامات (التشتت) يزداد S

$S = 2.94 \longrightarrow \sqrt{\frac{(4-2)^2 + (-1-2)^2 + (0-2)^2 + (5-2)^2}{4-1}}$

التباين

4) Varience:

Lo: S^2 = 8.64 (in the example)

5) Mean deviation:

$$= \frac{\sum |x_i - \mu|}{n}$$ mean

6) Median deviation:

$$= \frac{\sum |x_i - \bar{y}|}{n}$$ median

ex $\frac{2+3+2+3}{4} = 2.5$

* مو ضروري الـ median يكون بالوسط ، بكون أقرب
أو أبعد حسب القيم

B) Grouped Data:

** قوانين الـ Grouped Data نفس قوانين الـ Raw Data
بس الـ grouped مضروبة في (f_i)

1) standerd Deviation:

مركز الفئة

- Population (σ) $= \sqrt{\frac{\sum[(x_i-\mu)^2 . f_i]}{\sum f_i}}$

$\boxed{\sum F_i = n}$

- samples (s) $= \sqrt{\frac{\sum[(x-\bar{x})^2 . f_i]}{\sum f_i - 1}}$

[Box-whisker plot ⇒ صندوق]

ex (sample)

class	freq	class center
1-5	2	3
6-10	3	8
11-15	4	13
16-20	1	18

- $s = \sqrt{\frac{210}{9}}$

⇒ $s = 4.83$

$(\bar{x} = \frac{\sum x_i . F_i}{\sum F_i} = 10)$

$$S = \sqrt{\frac{(3-10)^2 \times \overset{f_i}{2} + (8-10)^2 \times 3 + (13-10)^2 \times 4 + (18-10)^2 \times 1}{9}}$$

2) Mean deviation:

class center

$$\frac{\sum[|x_i - \text{mean}| \times f_i]}{\sum f_i}$$

3) Median deviatio

$$= \frac{\sum[|x_i - \bar{y}| \times f_i]}{n}$$ medio

4) Inter quartile Range:

IQR = $Q_3 - Q_1$

* Descriptive statistical Measures

A Measures of location:

1) mean وسط حسابي 2) median وسيط

3) mode منوال 4) percentile النسبة

B Measures of variation:

1) Range 2) Inter quartile Range (IQR)

3) Standard deviation الانحراف معياري

4) Mean deviation

5) Median deviation

6) Varience

*(1.8) Comparing two observations:

• بنتعامل معها كأعداد عادية مثلاً -1 و -1.33

$-1 > -1.33$

① Z~score

	Math	phys.
$\bar{x}$	80	60
std	5	3
علامة الطالب ← x	85	64

$$\left[Z = \frac{x - \overset{\text{mean}}{\bar{x}}}{\text{std}} \right] \longrightarrow Z_{math} = \frac{85-80}{5} = 1$$

$$\longrightarrow Z_{phys} = \frac{64-60}{3} = 1.33$$

$\Rightarrow Z_{phys} > Z_{math}$

64 in phys. is better than 85 in math.

② Coefficient of variation: (C.V.)

*مقاييس التشتت النسبية.

$$\left[C.V. = \frac{\text{std}}{\bar{x}} * 100\,\% \right]$$

*ملاحظة مني ⇐ علامة الـ phys كانت أحسن في Z-score

لكن الـ variability في الـ math كانت أكبر في C.V

ex لـ لنفس المثال:

• $(C.V.)_{math} = \frac{5}{80} \times 100\% = 6.25\%$

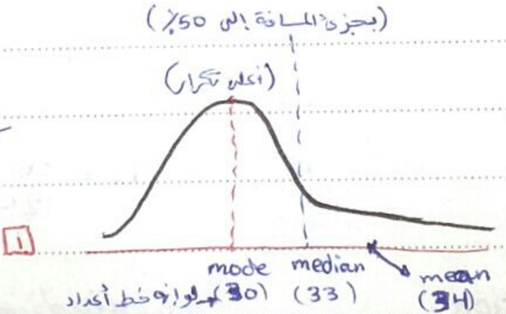
• $(C.V.)_{phys.} = \frac{3}{60} \times 100\% = 5\%$

$\therefore (C.V.)_{math} > (C.V.)_{phys.}$ ⇒ The variability in math is bigger (أو more) than that in phys.

③ Shape measures:

مش مطلوب قوانين ، فقط هذا المطلوب

الإلتواء 1) skewness:

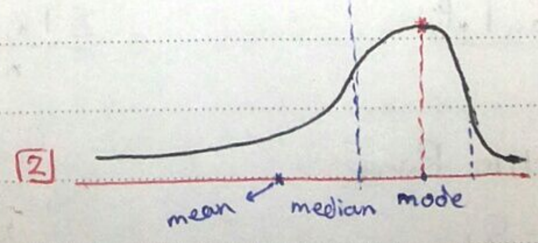


* الوسط الحسابي يميل إلى جهة القيم الشاذة.

* هم قراب من بعض بس عشان التوضيح بعدناهم.

in 1 skewed to the right

in 2 skewed to the left

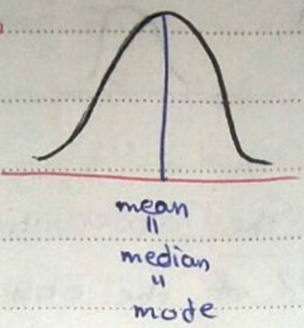


in 1 mode < median < mean

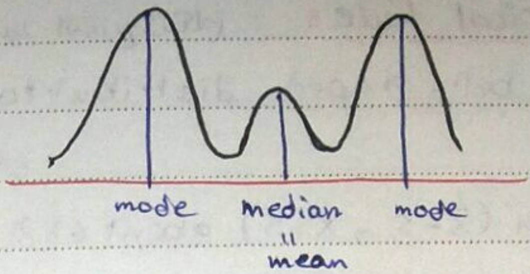
in 2 mean < median < mode

(unimodal) صول

* in the Symmetry:



or



2) kurtosis → تحنوف ←

(1.9) Applications:

* k → كم انحراف معياري تبعد عن الوسط.

[* لأي توزيع في الدنيا، هذا الكلام صحيح]

1) Chebyshev's Inequality:

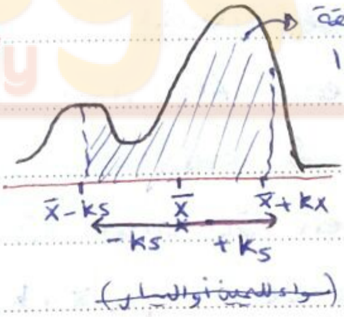
عدد الانحراف المعياري

① ↳ The proportion of observations within k standard deviation of the sampe mean $\bar{x}$ is at least $\left[1-\frac{1}{k^2}\right]$ (k > 1)

فترة

② ↳ within $[\bar{X}-ks, \bar{x}+ks]$ at least $1-\frac{1}{k^2}$ of the observation.

③ ↳



مساحة هذه المنطقة هو $1-\frac{1}{k^2}$ at least

(نفس الحكي بالثلاث أشكال) ③/②/①

[* هون ممكن ال k تطلع كسر عشري]

ex The grades of 460 students have mean $\bar{x} = 71$ and standard deviation s = 6. (s → standard deviation (sample))

Find the number of students whose grades are:

* ما بيهمني كيف العلامات موزعة.

Sol between 62 and 80

* $\bar{x} - k_1 s = 62$

$71 - k_1(6) = 62$

$71 - 62 = 6k_1$

$9 = 6k_1$

$\boxed{k_1 = 1.5}$

* $\bar{x} + k_2 s = 80$

$71 + k_2(6) = 80$

$6k_2 = 80 - 71$

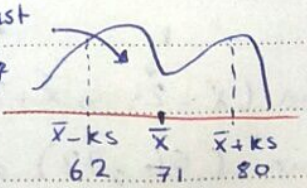
$6k_2 = 9$

$\boxed{k_2 = 1.5}$

(لازم يكونوا متساويان)

∴ at least $1-\frac{1}{(1.5)^2} = 0.56$

or • at least $1-\frac{1}{(1.5)^2}$



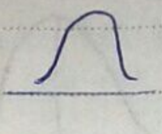
or • within [62, 80] at least $1-\frac{1}{(1.5)^2} = 0.56$ of the students.

⇒ within [62, 80] at least $(0.56)(460) = 257.6$ students $\simeq 258$

2) Empirical Rule:

اشترط التوزيع (شكله)

↳ For bell-shaped distributions

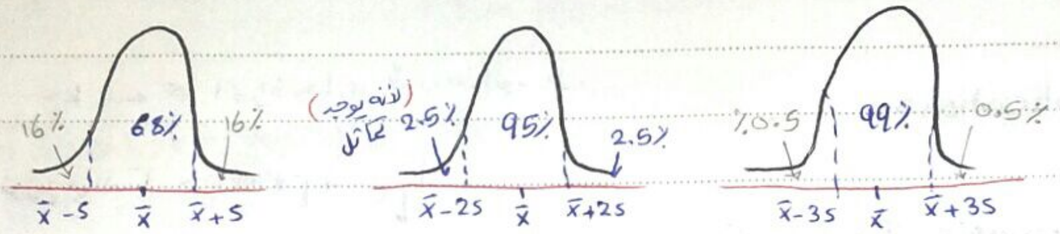


* مابهمني الفترة مغلقة أو مفتوحة.

① within $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ about 68% of the observations.

② within $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ about 95% of the observations.

③ within $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ about 99% of the observations.



(k=1) (k=2) (k=3)

* هون الـ K
لازم تطلع
1 أو 2 أو 3
مش كسر عشري.

له هون الشذوذ أكبر

* (إذا ابتعدت أكثر من انحرافين معياريين بدأت تدخل في المنطقة الشاذة)

ex: The ~~grades~~ weights (in kgs) of 370 students are bell-shaped distributed with mean 64 and standered deviation 4, Find the number of students whose weights are:

① between 56 and 72

• $\bar{x}-k_1 s = 56$	• $\bar{x}+k_2 s = 72$
$64-k_1(4)=56$	$64+k_2(4)=72$
$64-56=4k_1$	$4k_2=72-64$
$\boxed{k_1=2}$	$\boxed{k_2=2}$

• within $(\bar{x}-\overset{k_1}{2}s, \bar{x}+\overset{k_2}{2}s)$ about 95% of the students.

∴ within (56, 72) about 95% of the students

• within (56, 72) about 0.95(370) = 351.5 students
≈ 352

② between 56 and 76.

- $\bar{x} - k_1 s = 56$

$64 - k_1(4) = 56$

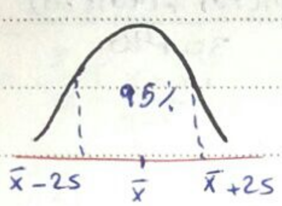
$\boxed{k_1 = 2}$

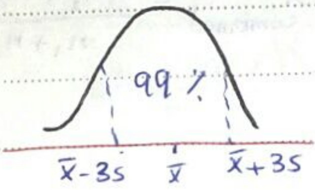
- $\bar{x} + k_2 s = 76$

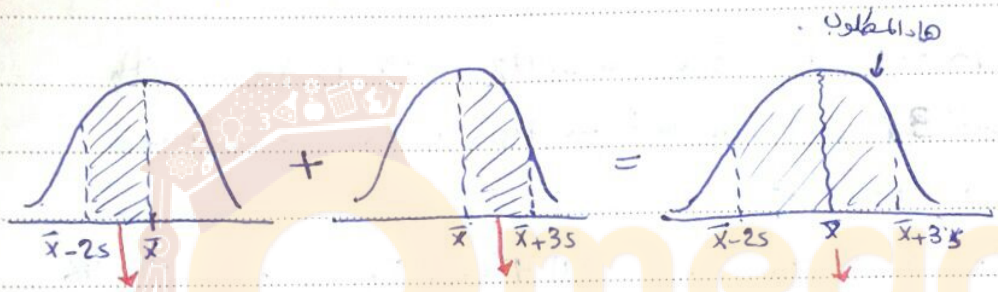
$64 + k_2(4) = 76$

$\boxed{k_2 = 3}$

- $(56, 76) = (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 3s)$







$\frac{0.95}{2} = 0.475$ $\frac{0.99}{2} = 0.495$ $0.475 + 0.495 = 0.970$

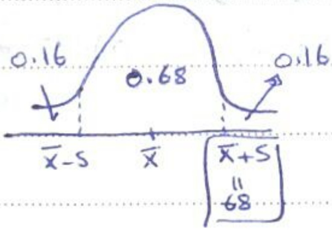
∴ within $(56, 76) = (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 3s)$ about 0.970 of the students.

③ More than 68

$\bar{x} + ks = 68$

$64 + k(4) = 68$

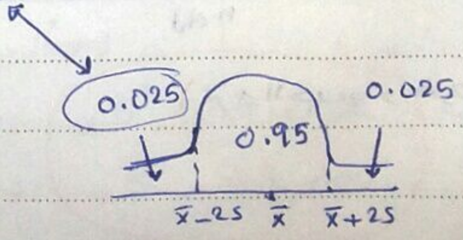
$\boxed{k = 1}$



- above 68 there are about 0.16 of the students.
- 〃 〃 〃 〃 〃 $(0.16)(370) = \boxed{}$ ~~#~~ students

④ Find the weight below which 0.025 of the students.

$\bar{x} - 2s = 64 - 2(4) = \boxed{56 \text{ kgs}}$



$0.025 + 0.025 = 0.05$

$1 - 0.05 = \boxed{0.95}$

* (1.10) Updating Descriptive measures:

• (1.10.1) Updating the mean:

① Mean of Combined samples:

	sec1	sec2
n	30	40
$\bar{x}$	70	80

$\frac{70+80}{2} = 75$ ✗

• $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \longrightarrow \overset{\text{مجموع العلامات}}{\boxed{\sum x_i}} = n\bar{x}$

• $\bar{x}_{\text{combined}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2} = \frac{(30)(70)+(40)(80)}{30+40} = 75.7$

② Adding Some Data:

ex The grades of 10 students have mean 42, if 3 students with grades 58, 50 and 37 are added to this class, Find the new mean?

• $\bar{x}_{new} = \frac{\overset{\text{مجموع علاماتهم قبل التعديل}}{(n_{old}\,\bar{x}_{old})} + 58+50+37}{\underset{\text{عددهم القديم} \leftarrow}{n_{old}} + 3} = \frac{(10)(42) + 58+50+37}{10+3} = 43.46$

③ Deleting some Data:

ex (removed from ⟵ adding نفس المثال السابق لكن بدل)

• $\bar{x}_{new} = \frac{(n_{old}\,\bar{x}_{old}) \overset{\text{طرح}}{-} (58+50+37)}{n_{old} - 3} = \frac{(10)(42) \overset{\text{طرح}}{-} (58+50+37)}{10-3} = 39.29$

④ Correcting some Data:

ex The grades of 10 students have mean 42. The grades of 2 students are changed from 45, 38 to 37, 36?

• $\bar{x}_{new} = \frac{(n_{old} * \bar{x}_{old}) + (37+36) - (45+38)}{n_{old}} = 41$

↓

(بزيد الجداد وبطرح القدام)

[mean] * combined $\longrightarrow \bar{x}_{new} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$

* adding data $\longrightarrow \bar{x}_{new} = \frac{(n_{old}\,\bar{x}_{old}) + (\sum \text{new data})}{n_{new}}$

* deleting data $\longrightarrow \bar{x}_{new} = \frac{(n_{old}\,\bar{x}_{old}) - (\sum \text{new data})}{n_{new}}$ ⟶ deleted الي راح

* correcting data $\longrightarrow \bar{x}_{new} = \frac{(n_{old}\,\bar{x}_{old}) + (\sum \text{new data}) - (\sum \text{old data})}{n_{old}}$

Subject:…………………… / /

(1.10.2) Updating the varience:

① Pooled and combined Variance:

- $$S^2_{pooled} = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2} \xrightarrow{\text{sample بس لانه لل}} S^2_{pooled} = \frac{\overset{\text{sample لانه}}{(n_1-1)} S_1^2 + (n_2-1) S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

- $$S^2_{combined} = S^2_{pooled} + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)} * \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{(n_1+n_2-2)}$$

- $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \Longrightarrow \boxed{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}}$$ (هادهو الشكل إلي راح يفيدنا)

إثباته : مش مطلوب .

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + x^2)$$

((توزيع للمجموع))

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i \overset{\text{الوسط الحسابي ثابت}}{\bar{x}} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \underbrace{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{n\,2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \rightarrow = \bar{x}} + \bar{x}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \quad \#$$

---

② varience after adding some data:

(Sample)

ex The grades of 10 students have mean 42 and ~~standard~~ std. dev. 7.
If 3 students with grades 58, 50 and 37 are added to this class, Find the new varience (or std. dev.) ?

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 \quad \text{ex if } 10,13,5 \\ 10^2+13^2+5^2 \neq (10+13+5)^2}$$

- $$S^2 = \frac{\sum^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}$$

من السؤال والمثال السابق .

- $$S^2_{new} = \frac{\sum x_{i\,new}^2 - n_{new}(\bar{x}_{new})^2}{n_{new}-1}$$

$$S^2_{new} = \frac{\sum x_{i\,new}^2 - (13)(43.46)}{13-1}$$

- $$S^2_{old} = \frac{\sum x_{i\,old} - n_{old}(\bar{x}_{old})^2}{n_{old}-1}$$

$$(7)^2 = \frac{\sum x_{i\,old}^2 - 10(42)^2}{10-1} \Rightarrow \sum x_{i\,old}^2 = 18081$$

- $$\sum x_{i\,new}^2 = \overset{18081}{\sum x_{i\,old}^2} + 58^2 + 50^2 + 37^2$$

$$\boxed{\sum x_{i\,new}^2 = 25314}$$

وبعوضها وبطلع s^2

- $S^2 \rightarrow$ varience
- $S \rightarrow$ std. dev.

③ Varience after deleting some data :

ex (removed from ⟵ adding (نفس المثال السابق لكن بدل

- $$S^2_{new} = \frac{\sum_{new} x_i^2 - n_{new}(\bar{x}_{new})^2}{n_{new} - 1}$$ من المثال السابق.

$$= \frac{\boxed{\sum_{new} x_i^2} - 7(39.29)^2}{7-1}$$

- $$S^2_{old} = \frac{\sum_{old} x_i^2 - n_{old}(\bar{x}_{old})^2}{n_{old} - 1} \longrightarrow \sum_{old} x_i^2 = 18081$$

- $$\sum_{new} x_i^2 = \sum_{old} x_i^2 - 58^2 - 50^2 - 37^2 = \square$$ وبعوضه فوق.

④ Varience after correcting some data :

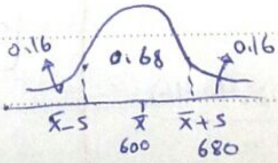
ex The grade of 10 students have mean 42 and std dev 7. If the grades of two students are changed from 45, 38 to 37, 36, Find the new varience ?

- $$S^2_{new} = \frac{\sum_{new} x_i^2 - n_{new}(\bar{x}_{new})^2}{n_{new} - 1} = \frac{\sum x_{i\,new}^2 - 10(41)}{10-1}$$

- $$\sum_{new} x_i^2 = \underset{\substack{\Downarrow \\ 18081}}{\sum_{old} x_i^2} + 37^2 + 36^2 - (45)^2 - (38)^2 = \square$$ وبعوضه فوق.

(كأنه الوسط الحسابي 600) (الانحراف المعياري 80)

Q17 : The average rain fall in Irbid is 600 mm, with a std. dev. of 80 mm over a period of 60 years (زي كأنه 60 طالب). Give the approximate number of years with rain fall over 680 mm (زي كأنه عدد الطلبة الي علاماتهم فوق 680). ? assuming that the distribution it's belled shaped.



- $680 = \bar{x} + ks$

$680 = 600 + k(80)$

$\boxed{k = 1}$

- the app. number of years with rainfall over 680 is $(0.16)(60) =$

$= 9.6 \approx \boxed{10 \text{ years}}$

* Q(18-20): coding

page(54) ex sample : $x = -2, 1, 0, 5$

$$\bar{x} = \frac{-2+1+0+5}{4} = 1$$

$$y = 2x - 5$$

x	$y = 2x-5$
-2	$2(-2)-5$
1	$2(1)-5$
0	$2(0)-5$
5	$2(5)-5$

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x-5 \Rightarrow \bar{y} = 2\bar{x} - 5 \\ y = ax+b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x}+b \end{array}\right]$$

$$\bar{y} = \frac{\textcircled{2}(-2)-5 + \textcircled{2}(1)-5 + \textcircled{2}(0)-5 + \textcircled{2}(5)-5}{4}$$

* هون كل المشاهدات تغيرت

بخراج (2) كعامل مشترك

$$\bar{y} = \frac{2(-2+1+0+5) - 4\times 5}{4} \longrightarrow \bar{y} = 2\left(\underbrace{\frac{-2+1+0+5}{4}}_{\text{نفس } \bar{x}}\right) - 5$$

ex In a sample : Mean $\bar{x} = 40$, median $M_x = 42$, mode $m_x = 43$

1st Quartile $(Q_1)_x = 33$, 3rd Quartile $(Q_3)_x = 55$, Range $R_x = 36$, std. dev $S_x = 5$

① If each observation x is changed to $y = 2x - 5$

(بدي أحسب كل جدول بعد التعديل)

- $y = ax+b$

Measures of Location (بيتأثروا بالتعديلات)

$\Rightarrow$ mean: $\underset{\text{الجديد}}{\bar{y}} = a\bar{x} + b \xrightarrow{y=2x-5} \bar{y} = 2\overset{\text{القديم}}{\bar{x}} - 5 = 2(40) - 5$

$\Rightarrow$ median: $M_y = aM_x + b \longrightarrow M_y = 2M_x - 5 = 2(42) - 5$

$\Rightarrow$ Mode: $m_y = am_x + b \longrightarrow m_y = 2m_x - 5 = 2(43) - 5$

$\Rightarrow (Q_1)_y = a(Q_1)_x + b \longrightarrow (Q_1)_y = 2(Q_1)_x - 5 = 2(33) - 5$

$\Rightarrow (Q_3)_y = a(Q_3)_x + b \longrightarrow (Q_3)_y = 2(Q_3)_x - 5 = 2(55) - 5$

بشرط $a>0$ موجبة

- $y = ax+b \Rightarrow$ std. dev: $S_y = |a|S_x \xrightarrow{y=2x-5} S_y = |2|S_x = |2|(5) = 10$

Measures of variation (التشتت لا يتأثر بالجمع والطرح فقط يتأثر بالضرب والقسمة)

$\Rightarrow$ varience: $S_y^2 = a^2 S_x^2 \longrightarrow S_y^2 = (2)^2 S_x^2 = 4(25) = 100$

$\Rightarrow$ Range: $R_y = |a| R_x \longrightarrow R_y = |2| R_x = |2|(36) = 72$

$\Rightarrow (IQR)_y = |a|(IQR)_x \longrightarrow (IQR)_y = |2|(IQR)_x = |2|\left[(Q_3)_x - (Q_1)_x\right]$

$= |2|(55-33) = 44$

Subject:........................ / /

② If each observation x is changed to $y = \frac{x+6}{-2}$ $= y = \frac{x}{-2} + \frac{6}{-2}$

$\Rightarrow$ mean: $\bar{y} = \frac{\bar{x}+6}{-2} = \frac{40+6}{-2} = -23$ (عادي تكون سالبة) ← $(y = \frac{-1}{2}x - 3)$

$\Rightarrow$ median: $M_y = \frac{M_x+6}{-2} = \frac{42+6}{-2} = -24$

* إذا لما أضرب بسالب

$\Rightarrow$ mode: $m_y = \frac{m_x+6}{-2} = \frac{43+6}{-2} = -24.5$

← الكبير بصير صغير والصغير بصير كبير

← يعني بصير $Q_1 \rightarrow Q_3$ ، $Q_3 \rightarrow Q_1$

$\Rightarrow (Q_1)_y = \frac{(Q_3)_x+6}{-2} = \frac{\overset{55}{\cancel{33}}+6}{-2} = \cancel{-19.5}\ -30.5$

$\Rightarrow (Q_3)_y = \frac{(Q_1)_x+6}{-2} = \frac{\overset{33}{\cancel{55}}+6}{-2} = -19.5$ $\longrightarrow$ * وهون $a<0 \leftarrow a = \frac{-1}{2}$

ex $4, 5, \underset{Q_1}{\underset{\downarrow}{7}}, 8, 11, 13, \underset{Q_3}{\underset{\downarrow}{14}}, 15, 18$

$\xrightarrow{*-2}$ $\underset{Q_3}{\underset{\downarrow}{-8}}, -10, -14, \cdots, \underset{Q_1}{\underset{\downarrow}{-28}}$

$\Rightarrow$ std. dev.: $s_y = \frac{s_x}{|-2|} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ varience: $s_y^2 = a^2 s_x^2 = (-\frac{1}{2})^2 (5)^2 = \frac{25}{4}$

$\Rightarrow$ Range: $R_y = |a|\,R_x = |-\frac{1}{2}|(36) = 18$

$\Rightarrow (IQR)_y = |a|\,(IQR)_x = |-\frac{1}{2}|\,[(Q_3)_x - (Q_1)_x] = \frac{1}{2}(55-33)$

تلخيص: * مقاييس الموقع تتأثر فقط $(+, -, *, \div)$

* مقاييس التشتت تتأثر فقط $(*, \div)$، وبنوخذ القيمة المطلقة لـ $|a|$

(من مقاييس الموقع) $\Rightarrow$* و ال Q ← إذا كان a موجب ← بتحل $(Q_1)_x$ في ال $(Q_1)_y$ و $(Q_3)_x$ في ال $(Q_3)_y$

← إذا كان a سالب ← بتحل $(Q_3)_x$ في ال $(Q_1)_y$, $(Q_1)_x$ في ال $(Q_3)_y$

ex In a sample, $P_{65} = 46$, $P_{35} = 17$, $P_{30} = 15$, $P_{37} = 18$

If each observation x is changed to $y = -3x + \frac{1}{4}$

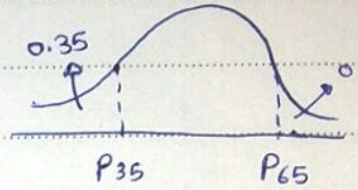
$$(P_{65})_y = -3(P_{35})_x + \frac{1}{4} = -3(17) + \frac{1}{4}$$

$\xrightarrow{\text{because}}$ • $0.65 + 0.35 = 1.00$

(بدي آخذ المتممة عشان يكملوا 100٪)

or • $65\% + 35\% = 100\%$

or •



• (1.11) Using the minitab → محذوف ←

Q8: For a unimodal distribution which is skewed to the left

↓ يعني الذيل على اليسار

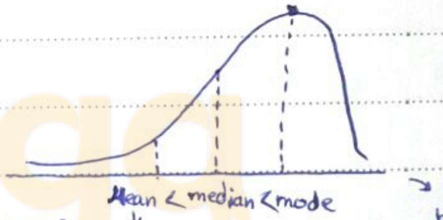
(Negatively skewed)

(a) mode = median = mean

(b) mode > median > mean

(c) mode < median < mean

(d) mode > mean > median.



بروح للقيم الشاذة

بعتبر هظ أعداد

القيم بتكبر بهذا الاتجاه. →

⟹ (b)

Q (11-13) (page 53): (sample)

	No. & cigarettes	No. & smokers		$(x_i . f_i)$
	10	1	شخص واحد بدخن ١٥ سجائر	$\rightarrow (10)(1) = 10$
هون موجود الطالب 2و3و4 →	15	3	٣ أشخاص كل واحد بدخن 15	$\rightarrow (15)(3) = 45$
	17	5		$\rightarrow 85$
الطالب x_{10} و x_{11}	20	2		$\rightarrow 40$
	22	4		$\rightarrow 88$
	(كأنه بعتبر عمود مراكز فئات (x_i))	total = 15	(بعتبر عمود كأنهم التكرار (f_i))	total = 268 $\sum x_i f_i$

زي كأنه ↳ $\underset{x_1}{10}, \underset{x_2}{15}, \underset{x_3}{15}, \underset{x_4}{15}, 17, 17, 17, 17, 17, \ldots\ldots$

(15 مشاهدة)

(لتتعامل مع السؤال على إنه بيانات خام.)

Q11 sample mean?

$$\hookrightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i . f_i}{\sum f_i} = \frac{268}{15} = 17.9$$

Q12 sample standard deviation?

$$\hookrightarrow s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{n-1}} \quad (n = 15)$$

Q13 The sample IQR?

$$IQR = Q_3 - Q_1 = \boxed{7} \ \#$$

• $Q_1 = P_{25} \rightarrow (np) = 15(0.25) = 3.75$ (Not integer)

$$\hookrightarrow P_{25} = X_{[np]+1} = X_{[3.75]+1} = X_{3+1} = X_4 = \boxed{15}$$

• $Q_3 = \boxed{22}$ (الرابع من تحت)

Subject: Chapter (2) / /

** Elements of Probability:

(2.1) Random experiment

* الفضاء العيني ← جميع النتائج الممكنة

ex Rolling a die once
مكعب نرد

↳ Sample space : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(الفضاء العيني)

ex Rolling a die twice

$$\Omega = \{\overset{\text{نتيجة واحدة}}{\overbrace{(1,1)}}, (1,2), (1,3), \ldots, \overset{\text{محاولة واحدة}}{\overbrace{(1,6)}}$$
$$(2,1), (2,2), \ldots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$$

((6,1) مش نفسها (1,6)) *

ex Tossing two fair coins once
متماثل

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

. T → tail كتابة

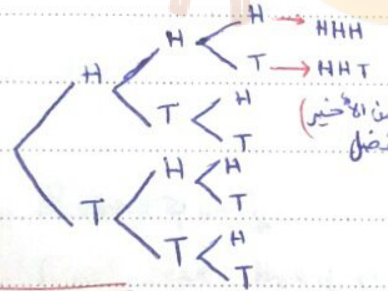
. H → Head صورة

ex Tossing a fair coin 3 times (or 3 fair coins once)

$\Omega =$ {~~HHH, TTT,~~ {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

بيتجمع ← ٣ صور ثم صورتين ثم ولا صورة

or



(يبدأ من الأخير أفضل)

ex Rolling a die twice

① The event A of getting a sum of 9. (حادث)

$A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

② The event B of getting a multiplication more than 18.

$B = \{(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(3,6) * مابنفعش لأنه بده أكثر من 18

③ The event C & getting a sum ~~less than~~ & 13

$C = \{\ \} = \emptyset$ ((حادث مستحيل)) (أقصى حد 12)

impossible event

④ The event (D) & getting a sum less than 13. (كلام)

$D = \Omega = \{(1,1), \dots, (1,6)$ ((حادث أكيد))

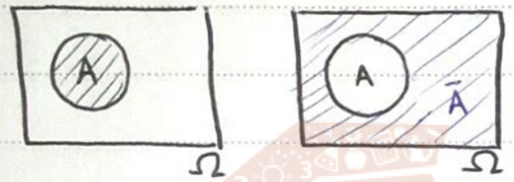
$\vdots$ complement event

$(6,1), \dots, (6,6)\}$

a) $\bar{A} \rightarrow$ A doesn't ~~ocurr~~ occur

* متممة A ← $\bar{A}$

يعني عدم وقوع (A) (يعني اللي برا الـ A وجوا Ω)



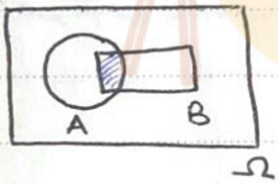
b) $A \cap B \rightarrow$ Both & them will ~~ocurr~~ occur

$\cap$ ↓ and (intersection)

* كأنها (و)

* التقاطع (المشترك) راح أمر عليه مرتين

بس بكفي أحطه مرة وحدة.

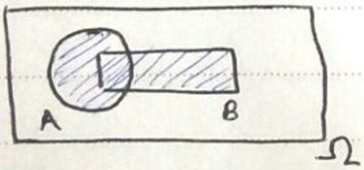


c) $A \cup B \rightarrow$ at least one & them will occur

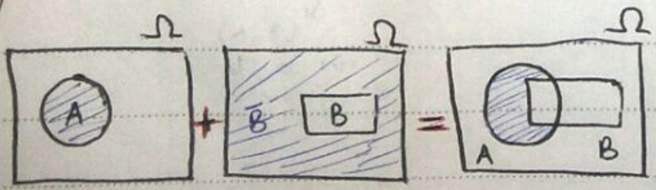
$\cup$ ↓ or (Union)

* كأنها أو

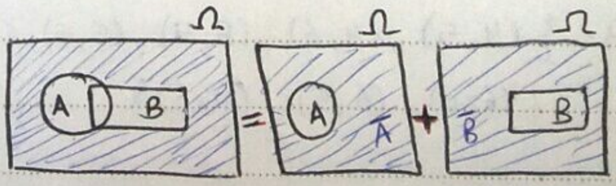
فيعني على الأقل واحد منهم كدة.



d) $A \cap \bar{B} \rightarrow$ (A) occurs But (B) doesn't occur



e) $\bar{A} \cap \bar{B} \rightarrow$ both & them doesn't occur



Subject:.................... / /

f) $\overline{\overline{A}} = A$ g). $A \cup A = A$ /. $A \cap A = A$

h). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

i) De Morgan laws: (قوانين مورغان) $\Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ & $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ⇐

① $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \overset{\text{نفسها}}{\Longleftrightarrow} \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n$

② $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i \Longleftrightarrow \overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$

ex on① : . $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ⟶ زي المثال في (e) ومتممة المثال (c)

$\underset{\text{(AUB) متممة}}{\downarrow}$ $\underset{\text{متممة A ∩ متممة B}}{\downarrow}$

إذا حطنا متممة المثال (c) راح تطلع تساوي المثال (e)

(2.2) Probability Concept: احتمال

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

$\frac{\text{عدد عناصر الحادث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ = احتمال أي حادث ⟹ أهم إشي في هادا السكيشن ⇐

ex Rolling adie twice.

① Find the probability of [getting asum of 9] ⟷ A

. $\Omega = \{(1,1), \dots, (1,6)$
$\vdots$
$(6,1), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$

. $A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(A) = 4$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36}$ #

f) $\overline{\overline{A}} = A$ g) $A \cup A = A$ / $A \cap A = A$

h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

i) De Morgan laws: (قوانين مورغان) $\Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ & $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ⇐

نفسها

① $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i \Leftrightarrow \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n$

② $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i \Leftrightarrow \overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$

ex on ①: $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ → زي المثال في (e) ومتممة المثال (c)

(AUB) متممة   متممة A ∩ متممة B

إذا عملنا متممة للمثال (c) راح تطلع تساوي المثال (e)

احتمال

(2.2) Probability Concept:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

احتمال أي حادث = عدد عناصر الحادث / عدد عناصر الفضاء العيني ⇒ أهم اشي في هاد السكشن ⇐

ex Rolling adie twice.

① Find the probability of [getting asum of 9] ⟷ A

$\Omega = \{(1,1), \dots, (1,6)$

$\vdots$

$(6,1), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$

$A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(A) = 4$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36}$ #

② The probability of [getting a multiplication more than 18] ↔ B

- $B = \{(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6)$
  $(6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 8$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36}$

③ The probability of $\overset{A}{\text{[getting a sum of 9]}}$ and $\overset{B}{\text{[a multiplication more than 18]}}$.

- $A \cap B = \{(4,5), (5,4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36}$

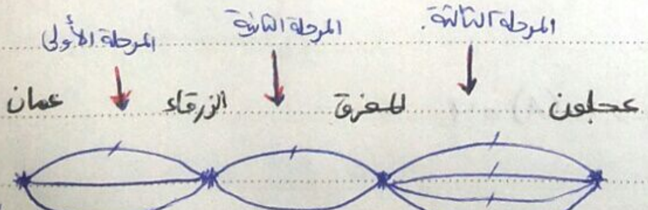
④ The probability of $\overset{A}{\text{[getting a sum of 9]}}$ or $\overset{B}{\text{[a multiplication more than 18.]}}$

- $A \cup B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$ ⇒ مابكرر الشغلة
  $(4,6) (5,5), (5,6), (6,4)$
  $(6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A \cup B) = 10$

* بالاتحاد.. مابنجمع n للثنين
لأنه التقاطع مابنكرره.

- $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36}$

* Multiplication Principle:



٣ طرق للوصول
من عمان إلى الزرقاء

$3 \times 2 \times 4 = 24$

٢٤ طريقة للوصول
من عمان إلى عجلون.

* عدد عناصر المرحلة الأولى
ضرب عدد عناصر المرحلة الثانية
ضرب عدد عناصر المرحلة الثالثة

Subject:...................... / /

الحادث (A)

ex Rolling a die 4 times. find the probability that (no two numbers are the same.)

بضل 5 خيارات وهكذا → المرحلة الثانية (المرحلة الأولى ٦ خيار)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6}$$

(٤ مرات رمينا حجر النرد.)
(٤ مراحل)

لو 6 ③ 2 ③ × غير مسموح في الحادث

لو 4 3 1 5 ✓

---

* Permutation: تباديل

ex In how many ways can we choose a manager (المدير) and co-manager (مساعد المدير) out of 4 people.

[A, B, C, D] → هدول هم الأربع أشخاص.

Manager	Co-manger
A	B
A	C
A	D
B	A
B	C
B	D
C	A
C	B
C	D
D	A
D	B
D	C

⇒ Total = 12

• $n! = n(n-1) \cdots (2)(1)$

ex $6! = 6(5)(4)(3)(2)(1)$

ex $6! = 6(5)(4!)$

تباديل

• $\left[{}_nP_r = n(n-1) \cdots (n-\underset{\substack{\downarrow \\ 10-3+1 \\ (8)}}{r}+1) \right] = \frac{n!}{(n-r)!}$

ex ${}_{10}P_3 = (10)(9)(8)$ • إذن بنبدأ في (10) وبننتهي في (8)

(زي كأنه بروح على مضروب الـ 10 وباخذ أول 3 منه)

ex ${}_{13}P_5 = (13)(12)(11)(10)(9)$

بالنسبة لسؤالنا → ${}_4P_2 = (4)(3) = 12$ #

لـ (أول عنصرين من مضروب الـ (4))

* **Combinations:** التوافيق

* هون في التوافيق ← لا يوجد فيها تمييز في المناصب

بختار أي اثنين BA نفس AB

ex In how many ways can we choose a committee of two members out of 4 persons.

* أما في التباديل ← يوجد فرق بين المناصب

A مدير و B مساعد يختلف عن B مدير و A مساعد

* التوافيق ليست دائماً نصف التباديل.

[A, B, C, D] 4 persons

AB BC CD

AC BD

AD

⇒ Total = 6

التوافيق

$$\left[\,{}_{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\right]$$

$$\hookrightarrow {}_{4}C_{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{(4)(3)(\cancel{2!})}{(2)(1)(\cancel{2!})} = \boxed{6}$$

\#

Notes: * التشابه بين التوافيق والتباديل:

① من بين n ← 4 اخترت r ← 2 ② التكرار غير مسموح AA غير مسموحة

* في التباديل يهمني الترتيب * في التوافيق لا يهمني الترتيب

$$\Rightarrow \ {}_{n}P_{r} = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \boxed{\frac{n!}{(n-r)!}}$$

$$* \ {}_{n}C_{r} = \boxed{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}} \qquad \left[\,{}_{n}C_{r} = \frac{{}_{n}P_{r}}{r!}\right]$$

← العلاقة بين التوافيق والتباديل.

* في المثال السابق (في بداية الصفحة السابقة) ← هو مثال على التباديل، والترتيب يهمني فيه.
↓
البسط (العادي)

↳ أما الفضاء العيني فيه ← فهو لا يعتبر مثال على التوافيق أو التباديل

↳ بنقدر نحله على طريقتين ← حسب إذا احنا بنهتم في الترتيب أولاً ← ① إذا بدنا نهتم في الترتيب راح يكون تباديل و الجواب كما هو مكتوب.

② إذا ما بدنا نهتم في الترتيب راح يكون توافيق، والجواب

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} \Leftarrow$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2!}}{4!\,\cancel{2!}} = $$ ↑ نفس العلاقة فوق

ex There are 8 students in aclass. Find the probability that [no two students have the same birthday.] $\overset{\text{الحادث}}{(A)}$.

* ما بنطلع على السنة تبعة الميلاد
* الشخص الأول ممكن يكون مولود في أي يوم من أيام السنة
يعني أمامه ٣٦٥ يوم (٣٦٥ اختيار)
* التجربة تمت على ٨ مراحل ، الشخص الأول هو المرحلة الأولى وهكذا
* والشخص الثاني أمامه ٣٦٥ اختيار ... وهكذا
* اخترت تباديل لأنه التكرار غير مسموح والترتيب بهمني.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$= \frac{{}_{365}P_8}{(365)^8}$$

$$= \frac{(365)(364)\dots(358)}{(365)^8}$$

* هون Ω مش تباديل.

---

ex $\boxed{① ② \text{-----} ⑧ ⑨}$ → $\overset{\text{سحبت}}{\text{Draw}}$ 4 balls with $\overset{\text{مع الإرجاع}}{\text{replacement}}$.

Find the probability [that they have different numbers.] $\overset{\text{الحادث}}{(A)}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

* هون Ω مش تباديل

$$= \frac{{}_9P_4}{(9)^4} = \frac{(9)(8)(7)(6)}{(9)^4}$$

$w_1\, w_2\, w_3 \text{ ---- } w_7$
$B_1\, B_2\, B_3$

$w_1 B_3$
$B_3 w_1$ > بختلفوا عن بعض

بدون إرجاع.

ex $\boxed{\begin{matrix} W & B \\ (7) & (3) \end{matrix}}$ → Draw two balls without replacement.

Find the probability that ① (both balls will be white.) $\overset{\text{اسم الحادث}}{(WW)}$

$$P(WW) = \frac{n(WW)}{n(\Omega)}$$

* التجربة تمت على مرحلتين (سحبت كرتين) (مع الاهتمام بالترتيب)
* والفضاء العيني جميع النتائج الممكنة
↲ الكرة الأولى أمامها ١٠ خيارات
↲ عند سحب الكرة الثانية أمامها ٩ خيارات.

7 طرق للاختيار الأولى بيضاء

$$= \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{{}_7P_2}{{}_{10}P_2}$$

* هون الفضاء العيني تباديل. لأنه بدون إرجاع
* والحادث أيضاً تباديل.

الامتحان الفيرست
حتى نهاية هذه الصفحة.

② Both Balls will be of the same colors → ww or BB

$P(ww \cup BB) = P(ww) + P(BB) - P(ww \cap BB)$

$= \frac{7\times6}{10\times9} + \frac{3\times2}{10\times9} - 0$

مش معقول الثنتين بيضا والثنتين سود بنفس الوقت لأني بس سحبت كرتين لو ٤ كرات بزبط.

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

important rule

③ Both Balls will be of different colors. → wB or BW

الأهمية بالترتيب

$P(wB \cup Bw) = P(wB) + P(Bw) - P(\underline{w}B \cap \underline{B}w)$

ما احتمال تكون الأولى بيضة وبنفس الوقت تكون الأولى سودا كمان (نفس الكرة) !! مش معقول

$= \frac{n(wB)}{n(\Omega)} + \frac{n(Bw)}{n(\Omega)} - 0$

* الفضاء العيني نفسه في كل الأفرع.

الكرة الأولى بيضا ↘ تكون السودا ↙

$= \frac{7\times3}{10\times9} + \left(\frac{3\times7}{10\times9}\right)$ → (احتمال لوحدها)

زي كأنه سؤال لحاله.

④ (at least one of the balls will be white.) = A

* يا موجودة بيضة أو ثنتين بيض.

$\bar{A}$ = no one is white = Both are black

↓

$P(\bar{A}) = P(BB) = \frac{3\times2}{10\times9}$

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A})}$$ rule

* طريقة أخرى لحل المسألة.

وهي بجمع الفرعين الأول والثالث.

$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3\times2}{10\times9}$ #

مكان لتخزين الأشياء

ex A lot consists of 1400 items 6% of them are defective (تالف), what is the probability that [a random sample of 70 items contains 16 defective items.] = A

6% ↘ $\frac{6}{100} \times 1400 = 84$ defective items.

N = 1400

D	Not D
84	1400-84

يعني أنا راح أختارهم معًا وما يهمني الترتيب.

draw 70 simontinuously (together)

* $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

المرحلة ① المرحلة ②

$= \frac{\binom{84}{16}\times\binom{1400-84}{70-16}}{\binom{1400}{70}}$

$\frac{84!}{16!(84-16)!}$

توافيق لأنهم معًا

* أنا بدي أختار 70 من أشياء مرقمة (الفضاء العيني منتج) من 1 - 1400

* في المثال السابق.
لما كان عندي أربع أشخاص ABCD
وكنت بدي أختار شخصين طلع 6
وهي توافيق

الحل
* الـ 16 التالفات اللي راح أختارهم من بين 84

* (التجربة تمت على مرحلتين المرحلة الأولى اختيار التالف والثانية صالح.)

Subject:........................ / /

* Axiomatic Probability:

الفرضيات

① For every event A, $P(A) \geq 0$

② $P(\Omega) = 1$

③ If $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of mutually ~~exclu~~ exclusive events that is, $[A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots)]$

Then:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

بشرط تحقق هذه

ex. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ } بشرط

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
  [$(A_1 \cap A_2 = \emptyset)$ بشرط (mutually exclusive event)]
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
  [if they're independent event]

* **Theorem (2.2.1):** $P(\emptyset) = 0$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

* **Theorem (2.2.2):** $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$

مش مطلوب proof: $A \cup \bar{A} = \Omega$

$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ من ②

$A \cap \bar{A} = \emptyset \xrightarrow{\text{من ③}} P(A \cup \bar{A}) = P(\bar{A}) + P(A)$ #

* **Theorem (2.2.3):** $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

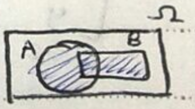
* **Theorem (2.2.4):** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

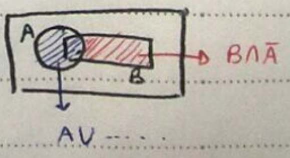
proof: $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap \bar{A}))$

$\overset{③}{=} P(A) + P(B \cap \bar{A}) \xrightarrow{\text{because}} A \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$

$= P(A) + (P(B) - P(A \cap B))$ Theorem (2.2.3)





Theorem (2.2.5): $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

* (2.3) Conditional probability:

* **Definition** (2.3.1): let A and B be two events, $P(B)>0$.

The conditional probability of A given B is:

$$\Rightarrow \left[P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \right]$$

الحادث A بشرط حدوث B
يعني B صار

* كأنه الفضاء العيني هو B
وانا قاعدة بدور على A جوا B

ex An urn contains 4 balls numbered from 1 to 4.

① ② ③ ④ → Draw two balls with replacement (مع الإرجاع), find the ~~probitity~~ probability that [the second ball is even numbered] (A) given that (بشرط) [the first ball is even numbered] (B)?

الـ B حادث وقع

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{n(A\cap B) \div n(\Omega)}{n(B) \div n(\Omega)} = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{4}{8}$$

- $A = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$
- $B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
- $A\cap B = \{(2,2),(4,2),(2,4),(4,4)\}$

لو بدنا الفضاء العيني
بطلع 16

---

ex Two cards (كروت الشدة) are drawn from a deck of cards, find the probability of getting [an ace (العدد واحد) on the first draw] (A) and (∧) ~~and~~ [an ace in the 2^{nd} draw] (B)

* كروت الشدة 52
ومنها عندي 4 كروت رقم واحد

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} & \text{with replace.} \\ \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} & \text{without replace.} \end{cases}$$

$$\because P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\rightarrow P(A\cap B) = P(B|A)\,P(A)$$

1) * $P(A|B) < P(A) \xrightarrow{\text{إذن}}$ B carry negative information about A

هاي المهمة

2) $P(A|B) = P(A) \Rightarrow$ B carry no information about A (زي كأنه وجود الشرط أو عدمه نفس الشي)

3) $P(A|B) > P(A) \Rightarrow$ B carry positive information about A

مستقلة وليست منفصلة

* ② **Definition:** A and B are independent events if and only if

$$P(A|B) = P(A) \Leftarrow$$

* **Theorem:** let $P(B) > 0$, $\Leftarrow$

- A and B are independent $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ التقاطع يتحول إلى ضرب

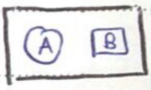
مستقلة (ممكن يكون متقاطعات)

proof: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

منفصلة.

- A and B are disjoint $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ $(P(A \cap B) = 0)$

مش متقاطعة.



ex Rolling adie $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, Are A and B independent events?

- $A \cap B = \{2\}$
- $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$
- $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$
- $P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \times P(B)$

$\frac{1}{6} \overset{?}{=} \frac{\cancel{2}}{6} \times \frac{3}{\cancel{6}3} \Rightarrow$ A and B are indep.

✓ إذا طلعوا مش متساويات إذن depe.

أو not indep

* إذا كان disjoint فهو مش indep.

* إذا كان indep. فهو مستحيل يكون disjoint
(مش disjoint)

* Theorem (2.3.2): Let $P(A)>0$, $P(B)>0$:

① A and B are disjoint ⟹ A and B are not independent

② A and B are independent ⟹ A and B can not be disjoint.

بيرهنها المثال السابق طلع معنا independent ، والتقاطع طلع مش disjoint

* Theorem (2.33): If A and B are independent.

Then 1): A and $\bar{B}$ are independent

2): $\bar{A}$ and B are independent

3): $\bar{A}$ and $\bar{B}$ are independent

proof for (1): بدي أتأكد إنو A & $\bar{B}$ independent , If A & B are independent, Then:

مش مطلوب

so $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A) \times P(B)$

عامل مشترك

$= P(A)\,[1 - P(B)]$

$= P(A) \cdot P(\bar{B})$ # so it's independent.

* Definision: The events $A_1, A_2, \dots, A_n$ are called mutually (or totally or complete) independent if:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) \quad , \; k = 2, \dots, n$$

هاي تعني حاصل الضرب

ex ⟶ we say that A_1, A_2, A_3, A_4 are mutually indep. if

لو بدي آخذ حادثين حادثين

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_4)$

$P(A_2 \cap A_3)$

$P(A_2 \cap A_4)$

$P(A_3 \cap A_4)$

⋮

يعني (الفكرة)
لو أخذت أي مجموعة جزئية
من الحوادث ، حادثين حادثين
٣ حوادث ، ٣ حوادث
٤ حوادث ، ٤ حوادث .. هكذا

* كلهم بلا استثناء لازم التقاطع يتحول لضرب

* إذا وحدة اختلت بيبطلوا mutually indep.

↳ يعني لازم اختبرهم . !!

Subject:...................... / /

لو بدي آخذ ٣ حوادث

- $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \times p(A_2) \times p(A_3)$

$p(A_1 \cap A_2 \cap A_4) =$ ⋮

$p(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ ⋮

$p(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

if there (A & B) are independent

*$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

*$p(A \cup B) = 1 - [p(\bar{A}) * p(\bar{B})]$

٤ حوادث

- $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = p(A_1) \times p(A_2) \times p(A_3) \times p(A_4)$

---

* **Theorem (2.3.4):** If $A_1, A_2, ----, A_n$ are mutually independent events

Then:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p(\bar{A}_i)$$

بشكل آخر

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - p(\bar{A}_1) \times p(\bar{A}_2) \times \dots \times p(\bar{A}_n)$$

proof:

* De morgan: $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ ⇒ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ⇒ $p(\overline{A \cup B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$

$p(A \cup B) = p(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}})$

$= 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B})$ indep.

$= 1 - p(\bar{A}) * p(\bar{B})$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = p\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i}\right)$$

mutually independent بنفرض

$$= 1 - p\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p(\bar{A}_i)$$

---

ex calculate the probability that [in 4 indep. rolls of a fair die, the outcome 3 will appear at least once.]

هذا الحادث

- ما احتمال في الـ ٤ رميات إلي رميتهم يظهر العدد 3 أربع مرات، ٣ مرات، مرتين، مرة.

متممتها ولا مرة يظهر العدد 3 نهائياً
أو واحد

- let A_i : getting 3 in the ith trial.

مثلاً $A_2 \rightarrow$ 2 يعني أحصل 3 في المحاولة رقم

$A_4 \rightarrow$ 4 يعني أحصل 3 في المحاولة رقم

هذا الحادث عبارة عن

- $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

$= 1 - p(\bar{A}_1) \times p(\bar{A}_2) \times p(\bar{A}_3) \times p(\bar{A}_4)$

(A_1, A_2, A_3, A_4 are mutully indept.)

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$

(لأنها متممة) ولا مرة يظهر عدد 3 ←

~~$P(A) = 1 - P(\bar{A})$~~

المتممة
عدم ظهور العدد 3

* هذا السؤال هو عبارة عن مثال على mutually indep.
لانه احتمال إني أحصل 3 في المحاولة الثانية هل يعتمد على المحاولة والمرة الأولى ؟!
لا ← إذن هو mutually indep
إذن هو مستقل.

* استخدمنا الاتحاد (أو)
لأنه معنى الاتحاد إنه وحدة تتحقق على الأقل.
لو تحققت وحدة إذن الـ 3 ظهرت مرة واحدة
لو تحققت ثنتين إذن الـ 3 ظهرت مرتين.

* **Another method:** إذا سميتا الحادث A

$$P(A) = 1 - P(\underset{\downarrow}{\bar{A}})$$

The number 3 doesn't appear in any trial.

(التجربة تحتكلى ٤ مراحل)

$$P(A) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{④} \rightarrow \text{4 trial.}$$

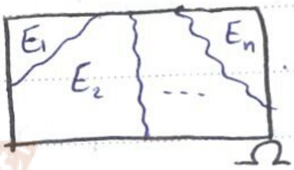
تجزئة

* We say that $E_1, E_2, \ldots, E_n$ is a partition of a sample space (Ω) if

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

• لا يوجد أي شيء مشترك بين أي اثنين.

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$



له يعني تقاطع اي اثنين $\emptyset$ واتحادهم Ω
وهذا هو معنى التجزئة.

• **Theorem (2.3.5): Law of total probability:** قانون الاحتمال الكلي.

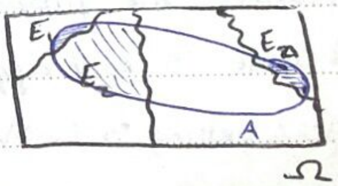
Let $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be a partition of Ω.

Then for any event A:

$$\Rightarrow \left[P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A|E_i)\right)^{(2)}\right]$$

$$\overset{(1)}{=} P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \cdots + P(A \cap E_n)$$

$$\overset{(2)}{=} P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + \cdots + P(E_n)\, P(A|E_n)$$



proof

$$P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \cdots \cup (A \cap E_n)]$$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n)$$

لأنه المشترك بين الاثنين لا شيء فيتحول الاتحاد إلى جمع

$$P(A|E_2) = \frac{P(A \cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$[P(A \cap E_2)] = [P(E_2)\, P(A|E_2)]$$

بدل التقاطع ممكن أحط هاي

[illegible]

$$\Rightarrow P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) = P(E_1) * P(A|E_1) + P(E_2) * P(A|E_2)$$

ex

D	ND
5	15

Box I

D	ND
2	12

Box II

تالف

D = defective

ND = not defec.

متماثل / مصباح

Roll a fair die once, If we get 2 or 5, select a bulb from Box I other wise draw a bulb from Box II. [Find the probability that the selected bulb is defective] $\overset{\frown}{p(D)}$

- بدي أرمي حجر نرد مرة واحدة
- (من وين بدي أسحب ، يعتمد على نتيجة حجر النرد)
- يعني بالأخير ، راح أسحب مصباح واحد سواء من الصندوق الأول أو الثاني .
- شغلة احتمال إنو يكون المصباح التالف ما بعرف و ما حدا من أي صندوق راح يكون .
- مطلوب السؤال ما احتمال تالف .

$$\cdot\ p(A) = p(E_1)\,p(A|E_1) + p(E_2)\,p(A|E_2)$$

احتمال اختيار الصندوق الأول

$$\cdot\ p(D) = p(\overset{\uparrow}{I})\,p(D|I) + p(II)\,p(D|II)$$

إما 5 أو 2 ← (احتمالين)

$$= \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{\underset{\downarrow\ 5+15}{20}}\right) + \left(\frac{4}{\underset{\downarrow\ \text{4 من 6 أوجه}}{6}}\right)\left(\frac{2}{\underset{\downarrow\ 2+12}{14}}\right)$$

مهم

* Theorem (2.3.6): Bayes Theorem

let A ~~be~~ an event and $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be a partition of Ω Then

$$\boxed{p(E_j|A) = \frac{P(E_j)\ P(A|E_j)}{P(A)}}\ \Leftarrow$$

where $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)\,p(A|E_i)$

- التجزئة هنا هون بس تجزئتين إما من الصندوق الأول أو الثاني .
- * الصندوق الأول هو التجزئة الأولى
- والصندوق الثاني هو التجزئة الثانية .
- ** اعرفنا إنو تجزئة لأنه ما في شي مشترك بين الصندوق الأول والثاني .
- واتحاد التجزئتين هو الفضاء العيني لأنني ما راح أسحب من الصندوق الأول أو الثاني .

$$\hookrightarrow\ p(E_2|A) = \frac{P(A\cap E_2)}{P(A)}$$

← نستخدم هاي النظرية إذا بدي احتمال التجزئة بشرط الحادث وأنا بعرف العكس (احتمال الحادث بشرط التجزئة)

$$* \ p(A) = p(A\cap E_1) + p(A\cap E_2)$$ (في التجزئة)

$$=$$

$$* \ p(A) = p(E_1) * p(A|E_1) + p(E_2) * p(A|E_2)$$

$$* \ p(E_j|\textcircled{A}) = \frac{p(E_j)\ p(A|\textcircled{E_j})}{p(A)}$$

(إذا بدي احتمال التجزئة بشرط الحادث وأنا بعرف العكس)

ex

D	ND
5	15

Box I

D	ND
2	12

Box II

تالف
D = defective

ND = not defec.

متماثل — مصباح

Roll a fair die once , If we get 2 or 5 , select a bulb from Box I other wise draw a bulb from Box II. [Find the probability that the selected bulb is defective] $\overset{\frown}{p(D)}$

- بدي أرمي حجر نرد مرة واحدة.
- (من وين بدي أسحب ، بعتمد على نتيجة حجر النرد)
- يعني بالأخير ، راح أسحب مصباح واحد. سواء من الصندوق الأول أو الثاني.
- شغلة احتمال إنو يكون المصباح التالف. ما بعرفو ما حدد من أي صندوق راح يكون.
- مطلوب السؤال ما احتمال تالف.
- التجزئة عنا هون بس تجزئتين إما من الصندوق الأول أو الثاني.

الصندوق الأول هو التجزئة الأولى
والصندوق الثاني هو التجزئة الثانية.

** اعرفنا إنو تجزئة لأنه ما في شي مشترك بين الصندوق الأول والثاني.

- واتحاد التجزئتين هو الفضاء العيني لأنني إما راح أسحب من الصندوق الأول أو الثاني.

$$p(A) = p(E_1)\, p(A|E_1) + p(E_2)\, p(A|E_2)$$

$$p(D) = p(\overset{\overset{\text{احتمال اختيار الصندوق الأول}}{\uparrow}}{I})\, p(D|I) + p(II)\, p(D|II)$$

$$\underset{\text{(احتمالين)}}{\overset{\text{إما 5 أو 2}}{\leftarrow}} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{\underset{\underset{5+15}{\downarrow}}{20}}\right) + \left(\frac{4}{\underset{\underset{\text{4 حل أوجه من 6}}{\downarrow}}{6}}\right)\left(\frac{2}{\underset{\underset{2+12}{\downarrow}}{14}}\right)$$

---

* Theorem (2.3.6): Bayes Theorem

مهم

let A ~~be~~ an event and $E_1, E_2, \dots E_n$ be a partition of Ω Then

$$\boxed{p(E_j|A) = \frac{p(E_j)\, p(A|E_j)}{p(A)}} \Leftarrow$$

where $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)\, p(A|E_i)$

$$\hookrightarrow p(E_2|A) = \frac{p(A \cap E_2)}{p(A)}$$

- منستخدم هاي النظرية إذا بدي احتمال التجزئة بشرط الحادث وأنا بعرف العكس (احتمال الحادث بشرط التجزئة)

$* p(A) = p(A \cap E_1) + p(A \cap E_2)$ (من التجزئة)

$=$

$* p(A) = p(E_1) * p(A|E_1) + p(E_2) * p(A|E_2)$

$* p(E_j|A) = \frac{p(E_j)\, p(A|E_j)}{p(A)}$ (إذا بدي احتمال التجزئة بشرط الحادث وأنا بعرف العكس)

ex A manufacturer buys electric circuits from 3 supplies I, II and III

6% of the circuits from I are defective $\longrightarrow P(D|\text{I}) = 0.06$

3% " " " from II " " $\longrightarrow P(D|\text{II}) = 0.03$

8% " " " from III " " $\longrightarrow P(D|\text{III}) = 0.08$

معناها ← مااحتمال تالف بشرط يكون من الثاني

The manufacturer buys:

20% of the circuits from supplier I $\longrightarrow P(\text{I}) = 0.20$

45% " " " " " II $\longrightarrow P(\text{II}) = 0.45$

35% (therest) " " " " " III $\longrightarrow P(\text{III}) = 0.35$

a) A circuit is chosen randomly just before assembly. what is the probability that it will be defective?

$$P(D) = P(\text{I})P(D|\text{I}) + P(\text{II})P(D|\text{II}) + P(\text{III})P(D|\text{III})$$

$$= (0.20)(0.06) + (0.45)(0.03) + (0.35)(0.08)$$

- للمصادر إلي بشتري منهم المصنع هم تجزئة
- تقاطع أي ثنتين ولا شي = $\emptyset$
- واتحاد الثلاثة بعطيني الفضاء العيني

b) A circuit is chosen and found to be defective what is the probability that it is from supplier II

لأنه المصنع ما راح يجيب اشي من برة

$$P(\text{II}|D) = \frac{P(\text{II})\,P(D|\text{II})}{(P(D))} = \frac{(0.45)(0.03)}{(\text{من الفرع السابق})}$$

مااحتمال إنها يكون من المصدر الثاني بشرط إنها تكون تالفة

a) بحكيلي مااحتمال إني آخذ قطعة تالفة بدون ما يحكيلي من أي مصدر؟!

(نفس السؤال السابق)

b) - ما بسألني إنها مااحتمال تالف.

- بسألني مااحتمال إنها من المصدر الثاني إذا كنت عارفة إنها تالف.

- أنا بدي أعرف ما احتمال التجزئة بشرط الحادثة وأنا بعرف العكس.

(2.4) Univariate Random variable:

1. Let x be a discrete random variable (r.v.) with Range $R_x = \{x_1, x_2, ...\}$

. Let $p(x = x_i) = p(x_i) = f(x_i)$

which is called the probability of x_i, In such case:

① $f(x_i) \geq 0$, that is $\rightarrow f(x_i) > 0 \rightarrow$ if $x_i \in R_x$

$\rightarrow f(x_i) = 0 \rightarrow$ if $x_i \notin R_x$

② $\sum_{x_i \in R_x} f(x_i) = 1$

* The function (f) is called the probability density function (p.d.f) of the discrete (r.v. x.)

ex Rolling a fair coin 3 times, let $\underset{\downarrow}{x}$ be the number of heads out of the 3 trials.

عدد الصور

① Find the sample space.

$\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$

② Find the range of x. (space of x)

Ω	X عدد الصور
TTT	0
TTH	1
THT	1
HTT	1
THH	2
HTH	2
HHT	2
HHH	3

$R_x = \{0, 1, 2, 3\}$

* R_x : هي النتائج اللي ممكن تطلعهم.

Subject:…………………… / /

③ Find the probability of each element in ~~of~~ the space of X.

* بسألني ما احتمال إنو الـ X تساوي 0

١ = X ، 5

⋮

X

$0 \rightarrow p(x=0) = \frac{1}{8} = f(0)$

$\left.\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\} p(x=1) = \frac{3}{8} = f(1)$

تكررت ٣ مرات من بين ال 8

* مشو يعني f(1)؟ يعني احتمال x=1

$\left.\begin{matrix}2\\2\\2\end{matrix}\right\} p(X=2) = \frac{3}{8} = f(2)$

* الاحتمال مستحيل يكون سالب

أقل اشي صفر وأقصى اشي واحد.

$3 \longrightarrow p(x=3) = \frac{1}{8} = f(3)$

* لو سألني ماهي f(7)؟ $f(7) = p(x=7) = 0$

* إذا كنت في مدى التوزيع، راح يكون أكبر من صفر (موجب)

عدا ذلك = صفر.
أي اشي برا

④ Write the probability density function (p.d.f) (f) of the discrete r.v.x.

X	0	1	2	3	Total
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum_{x=0}^{3} f(x) = 1$

⑤ Find the expectation (mean) of the discrete r.v.x.

$$\left[\mu_x = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \right] \Leftarrow$$

* يعني أضرب الـ x في صورتها

* $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \sum x_i * \left(\frac{f_i}{n}\right)$

هاي هي ال f(x)

X	0	1	2	3	Total
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum f(x) = 1$
x f(x)	$0 \times \frac{1}{8} = 0$	$1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$	$2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$	$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$	$\sum x f(x) = \frac{12}{8}$

* يعني ال E هو نفسه الوسط الحسابي

تراكمي

⑥ Find the commulitive destribution function (c.d.f) of X.

- $F(x) = p(X \leq x)$

* تراكمي ← يعني بدي آخذ كل الي قبلها.

- $F(2) = p(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \sum_{u \leq 2} f(x)$ $x = 0, 1, 2$ $(u = 0, 1, 2)$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

* $f \rightarrow$ probability density function

* $F \rightarrow$ commulitive ....

- $F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x<0 \\ 1/8 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & , \ 1 \leq x < 2 \ \leftarrow F(1.5) \text{ هون} \\ 7/8 & , \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \ 3 \leq x \end{cases}$

$f(0) + f(1)$

$\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$

* $F(2) \rightarrow$ يعني الـ 2 والي أقل منها

* لو طلب مني $F(1.5)$ ← يعني بدي أقل أو يساوي الـ 1.5

يعني ما اختلفت عن الـ $F(1)$ يعني الـ 0 و الـ 1

* لو طلب مني $F(7)$ ← نفسها $F(3)$

Ex Let X be adiscrete r.v. with ~~p.d.f~~ range $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$ and p.d.f :

$$f(x) = c\binom{3}{x}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

- لازم أول اشي اطلع الـ c

- احنا الي بنعرفه انو مجموع الاحتمالات = 1

Find $p(x=2)$?

- $p(x=2) = f(2)$

- we know that $\sum_{R_x} f(x) = 1$

- $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$

$\rightarrow \sum_{x=0}^{3} f(x) = 1$

$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

$c\binom{3}{0} + c\binom{3}{1} + c\binom{3}{2} + c\binom{3}{3} = 1$

$c(1) + c(3) + c(3) + c(1) = 1$

$$\boxed{c = \frac{1}{8}}$$

so. $p(x=2) = f(2) = \frac{1}{8}\binom{3}{2} = \frac{1}{8}(3) = \frac{3}{8}$ #

$f(0) = p(x=0) = \frac{1}{8}\binom{3}{0} = \frac{1}{8}$

$f(1) = p(x=1) = \frac{1}{8}\binom{3}{1} = \frac{3}{8}$

⋮

* الاجابات هون نفس ~~المجموع~~ الـ ④

من السؤال السابق.

* البي كان رمية قطعة نقد وكانت الـ x عدد الصور.

* يعني هو نفس السؤال

هون طالب العكس

ex The random variable x (R.V. x) has the following c.d.f
commulative

$$F(x) = \begin{cases} 0 , & x < 3 \\ \frac{1}{3} , & 3 \le x < 4 \\ \frac{1}{2} , & 4 \le x < 5 \\ \frac{2}{3} , & 5 \le x < 6 \\ 1 , & 6 \le x \end{cases}$$

- معنى تراكمي ← يعني بدي آخذ كل إلي تحت حتى لو ـــ والب مش بشرط لعند الصفر
- هون بدء من الـ 3 يعني تحت الـ 3 مافي شي
- لو طلب $F(3.5)$ نفس $F(3)$

$F(3.5) = \frac{1}{3} = p(x \le 3.5)$

① Find the p.d.f (probability density function) of x ?

. F is a step function

$\Rightarrow$ x is a discrete r.v.

- $F(4)$ ← يعني الـ 4 وإلي تحتها
- و $F(3)$ ← يعني الـ 3 وإلي تحتها

لـ إذن احتمال الـ 4 لحالها بدي آخذ الـ 4 وإلي تحتها (ناقص) الـ 3 وإلي تحتها

$$. f(4) = p(x=4) = p(x \le 4) - p(x \le 3)$$
$$= F(4) - F(3)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$. f(5) = F(5) - F(4)$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$. f(2) = p(x=2) = 0 \rightarrow$ لأنه أصلاً كل إلي تحت الـ 3 = صفر

$\therefore$ The p.d.f of x is

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} , & x = 3 \\ \frac{1}{6} , & x = 4 \\ \frac{1}{6} , & x = 5 \\ \frac{1}{3} , & x = 6 \\ 0 , & x > 6 \\ 0 , & x < 3 \end{cases}$$

$6 \le x \rightarrow F(6) = 1$

$p(x \le 6) = 1$

يعني فوق الـ 6 ماضل إشي = صفر

لأنه مجموع الاحتمالات كلهم = 1

مهم

$F(7) = 1$ But $f(7) = 0$

$\downarrow p(x \le 7)$ $\quad\quad$ $\downarrow p(x=7)$

. $F(3.5) = \frac{1}{3} = p(x \le 3.5)$ But prob. density function . $f(3.5) = p(x=3.5) = 0 = p(x \le \overset{3.5}{\cancel{3}}) - p(x < \overset{3.5}{\cancel{3}})$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

. $F(3) = \frac{1}{3} = p(x \le 3)$ But . $f(3) = p(x=3) = \frac{1}{3}$
$= p(x \le 3) - p(x < 3)$
$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

- قبل الـ 3 بالزبط الاحتمال 0
مجرد ماوصلنا الـ 3 فهو $\frac{1}{3}$
مجرد ما تعدينا الـ 3 لا يوجد احتمالات بضله $\frac{1}{3}$ حتى ماوصل 4

✱2 Let x be a continuous r.v. and its range R_x
The function $f(x)$ is called the p.d.f of x if

① $f(x) \geq 0$, that is:
- $f(x) > 0$, if $x \in R_x$
- $f(x) = 0$, if $x \notin R_x$

• الـ continuous ما بقدر أفصل بينهم

② $\int_{R_x} f(x)\,dx = 1$ $\left(\text{or} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\right)$

• في الـ discrete كان الشرط الثاني
$\left(\sum_{R_x} f(x) = 1\right)$

• أما في الـ con. ما في مجال أجمعهم جمع عادي. بكامل لأنه التكامل هو المساحة تحت المنحنى.

ex Let X be a continuous r.v. with p.d.f

$$f(x) = \begin{cases} Cx & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$$

• المنطقة الي فيها (0) ما بتهمني.
• لأنه برا المنطقة ~~مع~~ بين الـ 0 والـ $\frac{1}{2}$ ما في مساحة.

① Find C

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1/2} Cx\,dx$

$$= C\frac{x^2}{2}\Big]_0^{1/2} = \frac{C(\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{C(0)}{2} = \frac{C}{8}$$

- $1 = \frac{C}{8} \Rightarrow C = 8$

$\therefore f(x) = \begin{cases} 8x & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$

② Find $p(\frac{1}{4} < x < 6) = \int_{1/4}^{6} f(x)\,dx$

$$= \int_{1/4}^{1/2} 8x\,dx + \int_{1/2}^{6} 0\,dx = \ldots$$

• مش راح يطلب مني أكامل في الامتحان

• الاحتمال ما بصير يطلع أكبر من 1
الي هو 100%

③ Find $p(x = \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$

$$\int_{1/4}^{1/4} f(x)\,dx = 0 \longrightarrow f(\frac{1}{4}) = 8(\frac{1}{4}) = 2$$

• هون صورة الـ $\frac{1}{4}$ تعدت الـ (1)
لأنها مش احتمال

$p(x = \frac{1}{4}) \neq f(\frac{1}{4})$!! عادي

Subject: .... / /

مهم

* x is discrete r.v	x is a continuous r.v
① $\sum_{R_x} f(x) = 1$	① $\int_{R_x} f(x) = 1$
② $p(x=2) = f(2)$ هون الصورة مش لازم تتعدى الواحد	② $p(x=2) \neq f(2)$ هون عادي إذا تعدت الصورة الواحد. $p(x=2) = \int_2^2 f(x)dx = 0$
③ $p(2 < x < 5) = P(x=3) + p(x=4)$ $x = 3, 4$ $= f(3) + f(4)$	③ $p(2 \le x \le 5) = \int_2^5 f(x)\,dx$ * وجود الـ 2 أو عدم وجودها ما بأثر (وجود المساواة أو لا) لأنه إذا راحت نقطة من المساحة (التكامل) ما بتأثر.
④ $p(2 \le x < 5) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4)$ $x = 2, 3, 4$ $= f(2) + f(3) + f(4)$	④ $p(2 \le x < 5) = \int_2^5 f(x)\,dx$.

$$* \; E(x) = \begin{cases} \sum_{R_x} x f(x) \rightarrow x \text{ is discrete} \\ \int_{R_x} x f(x)\,dx \rightarrow x \text{ is continuous} \end{cases} \Leftarrow$$

$$* \; E(\underset{\text{اقتران}}{u(x)}) = \begin{cases} \sum_{R_x} u(x) f(x) \rightarrow x \text{ is discrete} \\ \int_{R_x} u(x) f(x)\,dx \rightarrow x \text{ is continuous.} \end{cases}$$

↳ ex $E(-3x^2+1) \underset{\underset{x \text{ is discrete}}{\downarrow}}{=} \sum_{R_x} (-3x^2+1) f(x)$

* **Result**: $E(ax^2+bx+c) = a\,E(x^2) + b\,E(x) + c$ ⇐

ex $E(-3x^2+4x-\frac{1}{2}) = -3\,E(x^2) + 4\,E(x) - \frac{1}{2}$

$$\left[E(x^2) \neq (E(x))^2 \Rightarrow \text{خطأ} \right]$$

* Variance:

* $Var(x) = E[(x-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_{R_x} (x-\mu)^2 f(x) , & x \text{ is discrete} \\ \int_{R_x} (x-\mu)^2 f(x)\, dx , & x \text{ is continuous.} \end{cases}$ ⇐

اسم آخر (σ^2)

* $Var\ X = \frac{\sum (x_i-\mu)^2 \times f_i}{n} \xrightarrow{\text{نفسها}} \sum (x_i-\mu)^2 \overset{\to f(x_i)}{\frac{f_i}{n}}$

* يعني هو نفس الـ Var
الي كنا ناخذه قبل .

* Theorem: ⇐

① $Var(x) = E(x^2) - (\overset{\text{نفسه } \mu}{E(x)})^2 = E(x^2) - \mu^2$

إذا فكينا التربيع

* عادة في الـ Var ما بنستخدم التعريف
بنستخدم النظرية .

② • $Var(ax+b) = a^2 Var(x)$

• $std.\ dev.(ax+b) = |a|\ std.\ dev.(x)$

* لأنه مقاييس التشتت بتأثر فقط
في الضرب والقسمة.

ex Let x be a discrete r.v. with p.d.f.

x	-3	0	2
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	C

① Find Var(x).

• $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

* $\sum_{R_x} f(x) = 1$

$f(-3) + f(0) + f(2) = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + C = 1 \longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$

x	-3	0	2	Total
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
x f(x)	$-3 \times \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$	$0 \times \frac{1}{4} = 0$	$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	-1
$x^2 f(x)$	$-3^2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$	$0^2 \times \frac{1}{4} = 0$	$2^2 \times \frac{1}{4} = 1$	5.5

• $E(x) = \sum_{R_x} x f(x) = -1$

• $E(x^2) = \sum_{R_x} x^2 f(x) = 5.5$

$\therefore Var(x) = 5.5 - (-1)^2 = 4.5$ #

discrete
Uni. Varia

* $\mu_x = E(x) = \sum x_i f(x_i)$

* $p.d.f \rightarrow p(x = \square) = f(\square)$

* $c.d.f \longrightarrow p(x \le \square) = F(\square)$

$x = \odot, \Delta \rightsquigarrow = p(x = \odot) + p(x = \Delta)$
$= f(\odot) + f(\Delta)$

* $E(ax^2+bx+c) = a E(x^2) + b E(x) + c$

* $\underset{\sigma^2}{Var(x)} = E[(x-\mu)^2] = \sum (x-\mu)^2 f(x)$

* $Var(x) = E(x^2) - \mu^2$ ⇜ (عادة بنستخدم هاد)

* $Var(ax+b) = a^2\ Var(x)$

* $std.\ dev.(ax+b) = |a|\ std.\ dev(x)$

② Find $Var(-4x+\frac{1}{2})$

$$Var(-4x+\tfrac{1}{2}) = (-4)^2\, Var(x) = (-4)^2\,(4.5)$$

③ Find $E(x(-2x+1)-\frac{1}{4})$

$$= E(-2x^2+x-\tfrac{1}{4}) = -2\,E(x^2)+E(x)-\tfrac{1}{4}$$

$$= -2\,(5.5)+(-1)-\tfrac{1}{4}$$

* جميع اللي راح بيتعامل مع متغير واحد.

(2.5) Bivariate Discrete Random Variables:

* هذا الدرس يتعامل مع متغيرين

* Let x and y be discrete random variables (R.V.S) ↳ وفقط ال discrete.

↳ Define the 2-dimensional range (space) of x and y by:

$$\left[R=\{(x,y) : x\in R_x ,\ y\in R_y\}\right]$$

* أزواج مرتبة المسقط الأول من x المسقط الثاني من y.

* The joint p.d.f of x and y is defined by

$$\left[f(x,y) = P(X=x\ ,Y=y)\ ,\quad (x,y)\in R\right]$$

* نفس اللي حكيناه في ال discrete

$(p(X=x) = f(x))$

and we have:

a) $f(x,y) \geq 0$ → لا يوجد جواب سالب.

b) $\sum\limits_{y}\sum\limits_{x} f(x,y)=1$

يعني بدي اجمع جميع قيم x وجميع قيم y

c) For any $A\subset R$

$$P((x,y)\in A) = \sum\sum_{(x,y)\in A} f(x,y)$$ → أخذنا المجموع لما ال x و ال y موجودان في الحادث.

ex Tossing a fair coin 3 time. Let (X) be the number of heads in the 3 trials. and (Y) be the number of heads in the 1^{st} and 2^{nd} trials.

① Find the space (Range) & the bivariate random variable (x, y).

* بتحكم في التجربة متغيرين
* قيم ال y هي عدد الصور في اول رميتين .
* ال x هي عدد الصور في ٣ رميات .
* في y يعني الرمية التالتة زي كإنها مش موجودة ؛

Ω	X	Y
TTT	0	0
TTH	1	0
THT	1	1
HTT	1	1
THH	2	1
HTH	2	1
HHT	2	2
HHH	3	2

$\therefore R = \{\overset{(x,y)}{(0,0)}, (1,0), (1,1), \cancel{(1,1)}, (2,1), \cancel{(2,1)}, (2,2), (3,2)\}$

* يعني جنب (3,1) مش موجودة .

$f(2,1) = p(X=2, Y=1) = \frac{2}{8}$

احتمال .

② Find the joint p.d.f of X and y.

y \ x	0	1	2	3
0	1/8	1/8	لايوجد 0	لايوجد 0
1	0	2/8	2/8	0
2	0	0	1/8	1/8

$\rightarrow f(2,1)$

Biv.

* $E(xy) = \sum_y \sum_x (xy) f(x,y)$
* $\mathrm{cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$
* $\mathrm{cov}(x,x) = E[(x-\mu_x)^2] = \mathrm{Var}(x)$
* $\mathrm{cov}(x,y) = E(xy) - \mu_x \mu_y \leftarrow$
* $\mathrm{cov}(ax+b, cy+d) = ac\,\mathrm{cov}(x,y)$
* $E(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = a_1E(x_1) + a_2E(x_2) + a_3E(x_3)$
* $\mathrm{Var}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = a_1^2\mathrm{Var}(x_1) + a_2^2\mathrm{Var}(x_2) + a_3^2\mathrm{Var}(x_3) + 2[a_1a_2\mathrm{cov}(x_1,x_2) + a_2a_3\mathrm{cov}(x_2,x_3) + a_1a_2\mathrm{cov}(x_1,x_2)]$
* $\rho = \mathrm{corr}(x,y) = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)}\sqrt{\mathrm{var}(y)}}$

+ve ac>0 -ve ac<0

③ $p(x > y)$ (إما بنستخدم الجدول في الفرع الأول أو في الفرع التاني.)

حسب الجدول التاني.

1 > 0
2 > 0
2 > 1
3 > 0
3 > 1
3 > 2

$\therefore p(X>Y) = f(1,0) + f(2,0) + f(2,1) + f(3,0) + f(3,1) + f(3,2)$

$= \frac{1}{8} + 0 + \frac{2}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$ #

④ $p(x+y=2)$

$0+2=2$ $\quad p(x+y=2) = f(0,2) + f(1,1) + f(2,0)$

$1+1=2$ $\quad = 0 + \frac{2}{8} + 0 = \frac{2}{8}$ #

$2+0=2$

---

ex Consider the joint p.d.f of x and y.

y \ x	-2	0	1
3	0	1/6	1/6
4	2/6	0	C

- الـ x هو عدد
- والـ y هو عدد
- بس هاد السؤال ما يهمني شو همة الـ x والـ y .

① Find C

$$\sum_{y}\sum_{x} f(x,y) = 1$$

$$\underset{f(-2,3)}{0} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + 0 + C = 1 \longrightarrow \boxed{C = 2/6}$$

New ② Find the marginal p.d.f of x

هامش

" " " p.d.f of y

y \ x	-2	0	1	$f_y(y)$
3	0	1/6	1/6	2/6
4	2/6	0	2/6	4/6
$f_x(x)$	2/6	1/6	3/6	

← ①

- في السطر الأول بس بدي أهتم في الـ x كأنه الـ y مش موجودة
- وفي السطر الثاني بس بدي أهتم في الـ y

① بدي الـ marginal لـ y يعني لل 3 و 4

(لل 3) زي كأنه بيسألني ما احتمال الـ y=3

$f_y(3) = p(y=3)$

ما في شروط على الـ x $\quad = f(-2,③) + f(0,③) + f(1,③)$

$= 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$f_x(-2) = p(x=-2)$

$= f(-2,3) + f(-2,4)$

$= 0 + \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$

بإمكاني فصل الجداول

y	$f_y(y)$
3	2/6
4	4/6
Total	1

جدول كان p.d.f

(مجموعهم = 1)

x	-2	0	1	Total
$f_x(x)$	2/6	1/6	3/6	1

هذا يعني p.d.f

- يعني يحقق الشروط :
- ما بصير الصور السالبة
- ومجموعهم = 1

* يعني عندي ٣ p.d.f :

الأصلي الـ joint ، وتبع الـ y ، وتبع الـ x

③ $P(Y=3 \mid X\le 0) = \dfrac{P(Y=3 \cap X\le 0)}{P(X\le 0)}$. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$= \dfrac{f(\overset{x}{-2},\overset{y}{3}) + f(0,3)}{P(X=-2)+P(X=0)}$ [* $X \le 0 \xrightarrow[\text{يعني}]{} X = -2, 0$]

* ال f نفسها الاحتمال

. $P(X=-2) = f_X(-2) = \frac{2}{6}$

. $P(X=0) = f_X(0) = \frac{1}{6}$

$= \dfrac{0 + 1/6}{2/6 + 1/6} = \dfrac{1}{3}$ #

④ Find $E(XY) = ?$

$E(u(x)) = \sum_x u(x) * f(x)$ → طالما كان متغير واحد.

$\rightarrow E(u(x,y)) = \sum_y \sum_x \underline{u(x,y)}\, f(x,y)$ → طالما صار متغيرين ⇐

Y \ X	-2	0	1
3	0 (-2)(3)(0) = 0	1/6 ------- = 0	1/6 $(\underset{y}{3})(\underset{x}{1})(\frac{1}{6}) = \frac{3}{6}$
4	2/6 $(-2)(4)(\frac{2}{6}) = \frac{-16}{6}$	0 ------- = 0	2/6 $(1)(4)(\frac{2}{6}) = \frac{8}{6}$

∴ $E(XY) = \sum_y \sum_x \underline{xy}\, f(x,y)$

$= 0 + 0 + \frac{3}{6} + \frac{-16}{6} + \frac{8}{6} = \frac{-5}{6}$ #

* لو طلب ال $E(xy^2+1)$

بس بربع ال y
وبضيف ال(1)

[$x\,y\,f(x,y)$]

⑤ Definition :- The covariance of x and y :

. $\text{cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$ ⇐

var is the same ⇝ ↳ $\text{cov}(x,x) = E[(x-\mu_x)(x-\mu_x)] = E(x-\mu_x)^2 = \text{Var}(x)$

*

⇒ * **Result**: $cov(x,y) = E(xy) - \mu_x \mu_y$

$$= \frac{-5}{6} - \underbrace{\left(\frac{-1}{6}\right)}\underbrace{\left(\frac{22}{6}\right)} \neq zero$$

* ممكن من الأول ~~أنو:~~
~~cov موصفر #~~
إذن ~~مو x & y~~ indep.

x	-2	0	1	Total
$f_x(x)$	2/6	1/6	3/6	1
$x f_x(x)$	-4/6	0	3/6	-1/6

y	$f_y(y)$	$y f_y(y)$
3	2/6	1
4	4/6	16/6
total	1	22/6

- $\mu_x = E(x) = \sum_{R_x} x f(x) = \frac{-1}{6}$
- $\mu_y = E(y) = \sum_{R_y} y f(y) = \frac{22}{6}$

⑥ * **Result**: $cov(ax+b, cy+d) = ac\ cov(x,y)$ ⇐

ex $cov(-2x+1, \frac{1}{3}y-5) = (-2)(\frac{1}{3})\ cov(x,y)$

⑦ we say x and y are independent r.v.s. if and only if:

↳ $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ for all (x,y)

(dependent) not independet لو وجدة اختلفت بيكون

* Remember:
A&B are independent event
↕
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

* $f(-2,3) \overset{?}{=} f_x(-2) \cdot f_y(3)$

$0 \neq \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$ ⇒ x and y are not independent.

⑧ * **Result**: x and y are independent ⇒ $cov(x,y) = Zero$

* بس العكس مو شرط إنو يكون صح:
↳ يعني إذا طلع معنا ال cov = صفر مش ضروري يكون ال x & y ← indepent
• اما إذا ما طلع معنا ال cov = صفر إذن ال x & y ← not indep.
(يعني نفي النتيجة يؤدي الى نفي الشرط)

[cov not zero ⟶ x and y not independent]

⑨ * **Result**: ① $E(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n+b)$

$\hookrightarrow = a_1E(x_1)+a_2E(x_2)+\dots+a_nE(x_n)+b$

② $Var\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\,var(x_i)+2\sum_{i<j}a_ia_j\,cov(x_i,x_j)$

لازم كل الاحتمالات.

ممكن تكون متغيرات y، z بنعتبرهم x_1، x_2، ...

$\hookrightarrow$ ex $var(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)$

$= a_1^2\,Var(x_1)+a_2^2\,Var(x_2)+a_3^2\,var(x_3)$

$+2\left[a_1a_2\,cov(x_1,x_2)+a_1a_3\,cov(x_1,x_3)+a_2a_3\,cov(x_2,x_3)\right]$

⑩ **Def**: The correlation coefficient of x and y:

* خذي ٣ ارقام ← لازم j اكبر من i.

$$\boxed{\rho_{(x,y)}=corr(x,y)=\frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)}\sqrt{var(y)}}}$$

الاحتمالات

i	j
1	2
1	3
2	3

(if $cov(x,y)=0 \Rightarrow corr(x,y)=0$)

⑪ **Result**: ① x & y are independent $\Rightarrow corr(x,y)=$ Zero

② $y=ax+b$ $\begin{cases} a>0 \longrightarrow corr(x,y)=1 \\ a<0 \longrightarrow corr(x,y)=-1 \end{cases}$

ex $corr(x,\textcircled{-2}x+1)=-1$

③ $corr(ax+b,cy+d)=\begin{cases} corr(x,y), & ac>0 \\ -corr(x,y), & ac<0 \end{cases}$

proof :- $corr(ax+b,cy+d)=\dfrac{cov(ax+b,cy+d)}{\sqrt{var(ax+b)}\sqrt{var(cy+d)}}$

$=\dfrac{ac\,var(x,y)}{|a|\sqrt{varx}\;|c|\sqrt{vary}}=\dfrac{ac}{|ac|}\;\underbrace{\dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{varx}\sqrt{vary}}}_{corr(x,y)}$

$\frac{ac}{|ac|}$: -ve if ac<0, +ve if ac>0

④ $-1\le corr(x,y)\le 1$

(Q 3-5 / page 98) Let A and B be two events in a random experiment such that

very important $p(A\cap\bar{B})=0.4$, $p(B\cap\bar{A})=0.1$ and $p(\overline{A\cap B})=0.6$

Q3: $p(\bar{A})$?

$p(A\cap\bar{B}) = p(A) - p(A\cap B)$

$0.4 = p(A) - 0.4$

$p(A) = 0.8 \longrightarrow p(\bar{A}) = 0.2$

Q4: $p(\bar{A}\cup B)$?

- $p(\bar{A}\cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A}\cap B)$

- $p(B\cap\bar{A}) = p(B) - p(A\cap B) \longrightarrow p(A\cap B) = 1 - p(\overline{A\cap B})$

$0.1 = p(B) - \boxed{0.4}$ $\quad = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$

$\boxed{p(B) = 0.5}$

$\hookrightarrow \therefore p(\bar{A}\cup B) = 0.2 + 0.5 - 0.1 = 0.6$ #

Q5: $p(B|\bar{A})$?

$= \dfrac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$\nearrow \neq (\overline{A\cap B})$

Q6 $p(A)=0.45$, $p(B)=0.5$, $p(\bar{A}\cap\bar{B})=0.2$

$p(A\cap B)$?

$p(A\cap B) = 1 - p(\overline{A\cap B})$ مارح تفضني

- By De Morgan: $\bar{A}\cap\bar{B} = \overline{A\cup B}$

$p(\bar{A}\cap\bar{B}) = p(\overline{A\cup B})$

$0.2 = p(\overline{A\cup B})$

$1 - 0.2 = p(A\cup B) = 0.8$

- $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$0.8 = 0.45 + 0.5 - p(A\cap B) \longrightarrow p(A\cap B) = 0.15$

ex If A & B are indep. events , $p(A)=0.3$, $p(\bar{A}\cap B)=0.4$

Find $p(A\cup\bar{B})=?$

$$\cdot\, p(A\cup\bar{B})=p(A)+p(\bar{B})-p(A\cap\bar{B})$$

$$=p(A)+p(\bar{B})-\underbrace{p(A)\cdot p(\bar{B})} \Rightarrow \text{independent}$$

$$=0.3+\boxed{\frac{3}{7}}-(0.3)\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$\cdot\, P(\bar{A}\cap B)=\underset{1-0.3}{p(\bar{A})}\cdot p(B)$$

$$0.4=(0.7)\cdot P(B)$$

$$p(B)=\frac{4}{7} \rightarrow p(\bar{B})=\frac{3}{7}$$

Q9 ← بدل الـ 3 مصادر للضو او

↳ ذكور واناث

← و بدل صالح وتالف

↳ محاسبو..

Q.10

R	W	R	W
3	2	2	1
box I		box II	

* بدنا نسحب كرة من I ونحطها في II

↳ ممكن تكون R ← بصيروا 3

↳ ممكن تكون W ← بصيروا 2

*: بس أنا مو عارفة شو اللون لأنه drawn Randomly

$$\cdot\, p(A)=p(E_1)\,p(A|E_1)+p(E_2)\,p(A|E_2)$$

$$\hookrightarrow p(R_{II})=P(T_R)\,P(R_{II}|T_R)+p(T_W)\,P(R_{II}|T_W)$$

$$=\underset{\text{من الكل في I}}{\left(\frac{3}{5}\right)}\ \underset{\text{من الكل في II}}{\left(\frac{3}{4}\right)}+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)$$

* بعدين رجعت سحبت من II

بحكيلنا ما احتمال تكون R من II ؟

* رح نستخدم التجزئة ← الجزء الأول : إذا نقلت R

↳ التجزئة الثانية : إذا نقلت W

↳ $\{w,R\}=\Omega$

Zero $=\underset{\text{التقاطع}}{\cap}$

- R_{II} : The drawn ball from ~~transfered~~ box II is Red.
- T_R : The transfered ball from box I to box II is Red
- T_W : The transfered ball from box I to box II is White.

السؤال هو

↳ One ball was drawn randomly from Box I and put in Box II. then one ball is drawn randomly from Box II. Q_{10} The Probability that the ball drawn from Box II is red?

Q_{11}: If the ball drawn from II is red

Find the probability that the transfered ball from box I to II is white?

$$P(T_W | R_{II}) = \frac{P(T_W)P(R_{II}|T_W)}{P(R_{II})} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}}{\boxed{}}$$

من السؤال السابق.

from. bey's $P(E_2|A) = \frac{P(E_2)\,P(A|E_2)}{P(A)}$

Q_{14}: What is the probability of randomly selecting 2 children wearing glass from 5.?

drawn 2 together.

WG	NG
3	2

WG : with glasses

NG : No glasses

مثل اختيار ضوء صالح وتالف.

من 3 لابسين بدي 2

من 2 مو لابسين مابدي ولا واحد.

- $P(\text{two WG}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}}$

من 5 بدي 2

- ما بهتم إذا ولد أو بنت المهم لابس ولا مش لابس نظارة.

Q_{15}: If children are asked to stand in one line. Find The probability that [Only ~~all~~ girls stands next to each others] is? (we have 3 girls & 2boys).

(A) event

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{{}_3P_3 \times {}_2P_2}{{}_5P_5} = \frac{(3\times2\times1)(2\times1)}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{\boxed{12}}{120}$$

البنات

طريقة

* التكرار غير مسموح

لأنه مستحيل نفس الشخص يجلس في أكثر من مكان

عنا B_1 & B_2 & G_1 & G_2 & G_3

* الفضاء العيني : ما بهمني مين جنب مين.

✗ A: $G_1\ G_2\ G_3\ B_1\ B_2$ $\xrightarrow{X}$ غير مسموح (لأنه الولاد جنب بعض)

* Ω بجم طريقة بقدر أحط ٥ أشخاص مختلفين يوقفوا في ٥ أماكن

✓ A: $B_1\ G_1\ G_2\ G_3\ B_2$ لازم بس البنات جنب بعض

$B_1\ G_1\ G_3\ G_2\ B_2$

$B_1\ G_2\ G_1\ G_3\ B_2$

$B_1\ G_2\ G_3\ G_1\ B_2$ 6 طرق

$B_1\ G_3\ G_2\ G_1\ B_2$

$B_1\ G_3\ G_1\ G_3\ B_2$

B_2 --(نفس الشي)-- B_1 6 طرق

12 طريقة

تباديل

* التجربة عنا على مرحلتين :

① البنات بـ ٣ طرق

② الولاد بـ ٢ طريقة

مسموح نستخدم ٣ أماكن

٣ بنات بـ ٦ طرق.

* لو بدون ~~كلمة~~ (only) كلمة بطلع عندي 36 طريقة

لأنه عندي ٣ حالات ممكن أخلي البنات جنب بعض، وكل حالة فيها ١٢ طريقة.

مهم

Q (18-19)(page 100) A random variable x takes the values 0, 1, 2.

هذا السؤال أصعب سؤال في الكتاب (فيه نص معلومات الحل)

$E(x) = \frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$, Find $p(x=0)$? → Q19

Q 20-22 مسألة # نفس المبدأ (مشابهة)

- $p(x=0) = f(0) = ?$
- $\sum_{x=0}^{2} f(x) = 1 \Rightarrow f(0) + f(1) + f(2) = 1$ ---- ①
- $E(x) = \sum_{x=0}^{2} x f(x)$

$\frac{3}{2} = 0 f(0) + 1 f(1) + 2 f(2)$

$f(1) + 2 f(2) = 1.5$ ---- ②

Q18 ← $E(x^2) = ?$

- $var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$(\frac{1}{2})^2 = E(x^2) - (\frac{3}{2})^2$

$E(x^2) = 2.5$

- $E(x^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 f(x)$

$2.5 = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2)$

$f(1) + 4 f(2) = 2.5$ ---- ③

- ③ − ② → $2f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$
- ② → $f(1) + 2 * \frac{1}{2} = 1.5 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$
- ① → $f(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow f(0) = 0$ $\therefore p(x=0) = f(0) = 0$ #

Q (23-24) (p.100) let (x, y) be a bivariate r.v., $E(x) = E(y) = 0$

$var(x) = 1$, $var(y) = 4$, $corr(x, y) = \rho = -\frac{1}{2}$

Q23 $E(3x^2 - 3y + 1)$? $= \underline{3E(x^2)} - 3E(y) + 1$

E هي الوسط الحسابي

- $E(x) = \mu_x$
- $E(y) = \mu_y$

- $var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$1 = E(x^2) - 0^2 \rightarrow E(x^2) = 1$

$\therefore E(3x^2 - 3y + 1) = 3(1) - 3(0) + 1 = \boxed{4}$ #

Q24 $Var(2x-3y+1)? = var(\overset{a_1\ x_1}{2x} - \overset{a_2 x_2}{3y})$

- $Var(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1^2\ var(x_1) + a_2^2\ Var(x_2) + 2a_1a_2\ cov(x_1, x_2)$

$= (2)^2\ var(x_1) + (-3)^2 var(x_2) + 2(2)(-3)\ cov(x,y)$

$= 4 * 1 + 9 * 4 + -12\ \underset{\alpha}{\underline{cov(x,y)}}$

- $corr(x,y) = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)}\sqrt{var(y)}}$

$-\frac{1}{2} = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{1}\sqrt{4}} \longrightarrow cov(x,y) = \boxed{-1}$ #

◦ ممكن يحكيلي في السؤال إنو الx وال y indep. .. وقتها بحكي على طول إنو ال $(cov(x,y)=0)$ ..

---

ex $cov(x,y) = -3$, $E(x) = -5$, $E(y) = 4$, $E(y^2) = 20$, $E(x^2) = 100$.

① Find $E(xy)$?

$cov(x,y) = E(xy) - E(x)\ E(y)$

$-3 = E(xy) - (-5)(4)$

$E(xy) = -23$ #

② $cov(\overset{a}{-2}x + \frac{1}{4}, \overset{c}{\frac{1}{3}}y - 5)$?

$= \overset{a}{(-2)}\overset{c}{(\frac{1}{3})}\ cov(x,y)$

$= (-2)(\frac{1}{3})(-3)$

③ $corr(-2x + \frac{1}{4}, \frac{1}{3}y - 5)$? $= \underset{\downarrow}{-}\ \underline{corr(x,y)}$

$a\,c = (-2)(\frac{1}{3}) < 0$

- $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 100 - (-5)^2 = 75$
- $Var(y) = E(y^2) - (E(y))^2 = 20 - 4^2 = 4$

↳ $corr(x,y) = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{varx}\sqrt{vary}} = \dfrac{-3}{\sqrt{75}\sqrt{4}}$

✿ ✿ The End of the Chapter ✿

Subject: Ch(3)   / /

* Discrete Probability Distribution :

يعني شغلتين بتحكموا في التجربة .

(3.1) The binomial Distributions : توزيع ذات الحدين *

* **Definition** : A binomial experiment is an experiment where there are [exactly two possible out comes] $\to$ success / fail

* If the experiment is repeated (n) ① independent and ② identical times, then the random variable :

[X : number of successes out of (n) indep. and identical trials]

is said to be a binomial r. v. and its distribution is called : the binomial destribution.

$$\left[\begin{array}{l} X \sim B\ (n, p) \\ p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n \\ \text{where } p = P\ (\text{success for each single trial}) \\ \qquad q = 1-p \end{array}\right]$$

- p → احتمال النجاح في كل محاولة
- q → احتمال الفشل
- n → عدد المحاولات

---

ex W 6, B 14 (indep. and identical trials), → draw 15 balls with replacement. ① [Find the probability of getting 6 white balls] "out of the 15 trials". ? → $p(x=6)$

لو ما كانت موجودة عادي

- Let x = number of white balls out of 15 independent and identical trials.

- $X \sim B\ (15, 0.3)$

$$p(X=k) = \binom{\overset{\text{عدد المحاولات}}{15}}{k} \underset{\downarrow}{0.3}^k (0.7)^{15-k}, \quad k=0,1,\dots,15$$

الملاحظات على المثال ⇒ في الصفحة التالية .

probability ←

- $p = P$ (white (sucess) for each single trial)

$= \frac{6}{20} = 0.3$

- $q = 1-p = 1-0.3 = 0.7$

$\therefore p(\underset{\underset{k}{\downarrow}}{x=6}) = \binom{15}{6}(0.3)^6(0.7)^{15-6} \xrightarrow{\text{(Table 1) من الجدول}} p(x=6) = p(x \le 6) - p(x \le 5)$

$= 0.869 - 0.722 = 0.147$ //

* نوع الأمثلة والأسئلة تبعت الاحتمال في السابق غير.. ← ملاحظات على المثال السابق *

* انا بدي أكتب الـ x من عندي، وبدي أسميها.

* زي كأنه الأبيض هو النجاح، والأسود هو الفشل

* لازم يتحقق الشرطين انو ① independent ② identical

** ليش المحاولات مستقلة ؟! • في المحاولة الأولى احتمال البيضاء = $\frac{6}{20}$ ، شو احتمال الثانية W ؟ = $\frac{6}{20}$

• يعني احتمال النجاح ($\frac{6}{20}$) ما اعتمد على أي محاولة قبلها أو بعدها .... مستقلات

** معنى identical ؟! • يعني احتمال النجاح نفسه $\frac{6}{20}$ لو المرة المليون..

• وعملية السحب [مع الإرجاع] حققت حصول الشرطين مع بعض.

* والمطلوب هو $p(x=6)$ .. يعني ما احتمال انو 6 كرات بيضا من بين الـ 15 محاولة.

* لو كانت عملية السحب (بدون إرجاع) ← احتمال الأولى = $\frac{6}{20}$ ، الثانية ← إذا الأولى W $\overset{بيض}{=} \frac{5}{19}$ or $B = \frac{6}{19}$

• يعني اختلف .. يعني احتمال النجاح بتغير .. يعني مش identical .. يعني ما بنشتغل على هاي الطريقة..

Table (1)
(Commulative Binomial probabilities)

* لما نيجي بدنا انطلع $p(x=6)$ بنرجع للجدول الي بخص الموضوع .. اللي هو

① $X \sim B(n,p)$ ← عنا $n=15$ و $p=0.3$ ، بنروح لجدول $n=15$

② بنروح لخانة الـ p العامودية تبعت 0.3.

k p

③ الـ k عنا تساوي 6 ... بنشوف مكان التقاء عامود (0.3) مع سطر (6).

④ هاد الجدول تراكمي ... يعني لازم نطرح عشان نطلع قيمة الـ $p(x=6)$.

$$k=5 \longrightarrow p=0.722 = p(x\leq5) = p(x=0)+p(x=1)+\dots+p(x=5)$$

$$k=6 \longrightarrow p=0.869 = p(x\leq6) = p(x=0)+p(x=1)+\dots+p(x=6)$$

$$\therefore p(x=6) = p(x\leq6) - p(x\leq5)$$

$$= 0.869 - 0.722 = 0.147 \quad \#$$

Done by Ruba

* الجدول مصمم لأقل أو تساوي.

$$p(X \leq \square)$$

② Less than 6 white balls out of 15 trials.

$p(x<6) = p(x \leq 5) = 0.722$

$x = 0, 1, \ldots, 5$

* ما احتمال إنو يطلع معي أقل من 6 كرات بيضا

③ More than 6 white balls out of 15 trials.

$p(x>6) = 1 - \overset{\text{ما بدي إياه}}{p(x \leq 6)}$

$x = 7, 8, \ldots 15$ $\qquad x = 0, 1, \ldots, 6$

$= 1 - 0.869$

* الـ 6 وتحت ما بدّي إياهم.
* الـ 7 بدّي إياها.
* بستخدم المتممة عشان أشيل الي ما بدي إياه.

④ At least 6 white balls of the 15 trials.

$p(x \geq 6) = 1 - p(x \leq 5)$

$x = 6, 7, \ldots, 15$ $\qquad x = 0, 1, \ldots, 5$

$= 1 - 0.722$

* الـ (1) يعني كل الأرقام من 0 — 15

* على الأقل 6
* يعني الـ 6 بدي إياها.

← يعني بدي أشيل الـ 5 وتحت عن طريق المتممة.

⑤ between 3 and 8 white balls, exclusive, out of 15 trials.

$p(3 < \overset{x}{\cancel{3}} < 8) = p(x \leq 7) - \overset{\text{ما بدي إياه}}{p(x \leq 3)}$

$x = 4, 5, 6, 7$ $\qquad x = 0, 1, \ldots, 7$ $\qquad x = 0, 1, 2, 3$

بدي أشيل هدول من هدول

$= 0.950 - 0.297$

* exclusive ← يعني مش مشمولة

يعني ما بدي الـ 3 ولا الـ 8

بدي إلي بينهم.

⑥ Between 3 and 8 white balls, enclusive, out of 15 trials.

$p(3 \leq x \leq 8) = p(x \leq 8) - \overset{\text{ما بدي إياه}}{p(x \leq 2)}$

$x = 3, 4, \ldots, 8$ $\qquad x = 0, 1, \ldots, 8$ $\qquad x \leq 0, 1, 2$

$= 0.985 - 0.127$

* enclusive ← يعني مشمولة

⑦ $p(3 < x \leq 8) = p(x \leq 8) - p(x \leq 3)$

$x = 4, 5, 6, 7, 8$ $\qquad = 0.985 - 0.297$

* $X \sim B(n,p)$

- Mean : $\mu = E(x) = np$

- Varience : $\sigma^2 = var(x) = npq$

ex $X \sim B(12, 0.4)$, Find $E(x(3x-1)+5)$?

- $= E(3x^2 - x + 5)$

$= 3\,E(x^2) - E(x) + 5$

- $E(x) = np = 12(0.4)$

$= 4.8$

- $\sigma^2 = npq = 12(0.4)(0.6)$

$= 2.88$

- $\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2$

$2.88 = E(x^2) - (4.8)^2$

$E(x^2) = \square$

$\hookrightarrow \therefore = 3 * \square - 4.8 + 5$ #

---

ex $X \sim B(n,p)$, $\mu = 7$, $\sigma^2 = 2.1$, Find $p(x=2) = ?$

* لازم أعرف عدد المحاولات (n)

* ولازم أعرف احتمال النجاح في كل محاولة (p)

- $\mu = np \Rightarrow 7 = np$
- $\sigma^2 = npq \Rightarrow 2.1 = \underbrace{np}q$

$= 2.1 = 7q \longrightarrow \boxed{q = 0.3}$

- $p = 1 - q = 1 - 0.3 = \boxed{0.7}$

* احتمال النجاح 0.7

أجريت التجربة 10 مرات

فإنّو احتمال إني أنجح

صفر مرة أو مرة

احتمال ضعيف جداً

وهذا يفسر قيم الجدول.

- $np = 7 \longrightarrow n * 0.7 = 7 \longrightarrow \boxed{n = 10}$

$\therefore X \sim B(10, 0.7)$

$p(x=2) = p(x \le 2) - p(x \le 1)$

$= 0.002 - 0.000$

ex A multiple choice exam consists of 20 questions, each question has 5 choices only one of them is correct.
If a students answers randomly, ① Find the probability of getting at least 10 correct answers out of the 20 questions.

- $Q_1 \;\; a\,b\,c\,d\,e \rightarrow \begin{array}{cc} C & W \\ 1 & 4 \end{array}$

  select 20 question (or balls) with replacement
  or draw
  or solve

  $Q_2 \;\; a\,b\,c\,d\,e \rightarrow$

  $\vdots$

  Q_{20}

- X = number of correct answers out of 20 idep. and identical trials.

- $X \sim B(\overset{n}{20}, \overset{p}{0.2})$

- $\overset{\text{احتمال}}{p} = p$ (correct answer for each question) $= \frac{1}{5} = 0.2$

- $P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9)$
  $= 1 - 0.997 = \boxed{0.003}$

② $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

- $X \sim B(\overset{n}{20}, \overset{p}{0.2})$
- $\mu = np = (20)(0.2) = 4$
- $\sigma^2 = npq = (20)(0.20)(0.80) = 3.2$

  $\sigma = \sqrt{3.2} = 1.79$

$\therefore P(4 - 3(1.79) < X < 4 + 3(1.79))$

$P(-1.37 < x < 9.37)$

$x = 0, 1, \dots, 9$

$= P(X \le 9)$

$= 0.997$ #

* المفروض أي سؤال Binomial
أحوّله إلى سؤال سحب كرات
مع إرجاع .
↳ ما علاقة هذا بسحب الكرات ؟!
* السؤال الأول يعني المحاولة الأولى .
* أنا جاوبت السؤال الأول واخترت b
بغض النظر إذا صح أو خطأ .
لما آجي بدي أجاوب السؤال الثاني
ما إله دخل بجوابي في السؤال الأول
فهذي كأني سحب كرة مع الإرجاع .
* فيعني كل السؤال هو إحدى المحاولات .
~~الـ Binomial .. المعزز~~
* في المحاولة الثانية احتمال إني أختار
الإجابة صح هو $\frac{1}{5}$ بغض النظر
عن السؤال الأول .
* هو بسألني ما احتمال إنو يجاوب نص
الامتحان أو أكثر صح ؟!.
↳ احتمال 0.003 .. معجزة .
• لو سألني كم نص الامتحان بالزبط
يطلع صح بطلع معي أقل من 0.003

الفرع ②
* قيم X لازم تكون أعداد صحيحة .
* يعني لازم أحصي الأعداد السالبة .
* وجود المساواة هنا لا يفرق (في الكسور)
* أما يفرق في الأعداد الصحيحة .

اسم عالم رياضيات فرنسي

(3.2) Poisson Distribution :

* المفروض إنو يذكر في السؤال إنو هاد النوع من التوزيع.

$X \sim \text{Poisson}(\mu)$

- μ = The mean of occurances within aperiod of time.

$(e \cong 2.72)$

k = عدد مرات إلي بدي إياها

عادة في الحسابات ما بستعمل هاد الإشي

$$\left[p(X=k) = \frac{e^{-\mu}\mu^{k}}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n \right]$$

ex The average number of admissions (الدخول) to the ICU is 5 patients per day. If a day is selected randomly, find the probability that the number of admissions is :

① 6 patients per day

* اعرفنا إنو poisson :
لأنه يكون معطيني الوسط الحسابي خلال فترة زمنية معينة.
* أو ممكن يعطيني الوسط الحسابي في حيز ما.

X = number of admissions to the ICU per day.

$X \sim \text{poisson}(\overset{\mu}{5})$

$p(x=6) = \frac{e^{-5}\,5^{6}}{6!} = \square$

another method : (Table 2: comulative Poisson Probabilites)

* الجدول مصمم تراكمي.

① بدي أروح على ال $\mu = 5$

② هلا بدي أروح على ال $k = 5$ و 6

$k = 5 \longrightarrow 0.616 = p(X \le 5)$

$k = 6 \longrightarrow 0.762 = p(X \le 6)$

$p(x=6) = p(x \le 6) - p(x \le 5)$

$= 0.762 - 0.616 = \square$

② More than 4 patients. (لليوم)

$p(x > 4) = 1 - p(x \le 4)$

~~③ If one~~

* **Bionomial Destribution :**
  - $X \sim B(n, p)$
  - mean $= \mu = E(x) = np$
  - var $= \sigma^2 = npq$
  - with replace.
  - identicaly
  - independent
* **Poisson Destribution :**
  - $X \sim \text{poisson}(\mu)$
  - mean $= \mu = E(x)$
  - Var $= \sigma^2 = \mu$
  - within aperiod of time

③ If a week selected randomly, find the prob. that the number of admissions is less than 28 are admitted to the ICU.

$P(X < \frac{28}{7}) = P(X < 4)$

$= P(X \le 3)$ (poisson(5) من)

* $\frac{28}{7} = 4$; for days
لأنه أسبوع
(4 patients for day)

* $X \sim$ poisson (μ)

- Mean : $\mu = E(X)$
- Var : $\boxed{\sigma^2 = \mu}$

ex $X \sim$ poisson (4) , find $E(3x^2 - 5) = 3E(x^2) - 5$

$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

$4 = E(x^2) - 4^2$

$E(x^2) = 20$

* $X \sim B(n, p) \xrightarrow[\substack{n \ge 30 \\ p < 0.10}]{\text{approximation}} X \sim$ poisson (μ)

$\mu = np$

مش مطلوب

* لأنه الجدول لل Bianmail أقصى حد 25
فلما يكون عدد المحاولات كبير بصيرو الجدول
بدون فائدة .. فبقرب (لما يكونوا عدد
المحاولات كبير و نسبة النجاح صغيرة)

هندسي

(3.3) Geometric Distribution:

ex The probability of hitting a target for each single trial is 0.8.
(الهدف, إصابة)

① Find the probability of hitting the target for the first time in the 5th trial.

② Find the probability of hitting the target 3 times out of 5 trials

Subject: .... / /

(hitting the target)

*sol : ② Y = number of successes out of 5trials.

$Y \sim B(\overset{n}{5}, \overset{p}{0.8})$

$p(X=3) = p(X \leq 3) - p(X \leq 2)$

$= 0.263 - 0.058$

New

① . $X \sim \text{Geom}(p)$

. X = number of trials and identical trials ~~out of~~ till we get the first success.

(غير موجود الـ k=0)

. $\left[p(X=k) = q^{k-1} p \ , \ k = 1, 2, \dots, n \right]$

where . p = p(success for each single trial)

. $q = 1 - p$

⇒ X = number of trials till we hit the target for the first time.

$X \sim \text{Geom}(\overset{p}{0.8})$

$p(X=5) = q^{k-1} p = (0.2)^{5-1}(0.8)$

$= (0.2)^4 (0.8)$.

* هنا الفرع مثال على الـ Bionamial

* هاذا السؤال زي كأنه سحب كرات

مع الإرجاع . وبدي أسحب 5 كرات . $\begin{array}{cc} W & B \\ 8 & 2 \end{array}$

* المحاولة الأولى احتمال النجاح $\frac{8}{10} = 0.8$

والمحاولة الثانية لا تعتمد على المحاولة الأولى

فاحتمال إني أصيب الهدف في المحاولة الثانية = 0.8

* نص السؤال في الـ Bionomial :

↲ ما احتمال النجاح في △ في □ منا للمحاولات

* ما احتمال إني أنجح لأول مرة في المحاولة الـ 5

↲ يعني إنو المرة الأولى فشل (و) المرة الثانية فشل

(و) المرة الثالثة فشل (و) المرة الرابعة فشل ..

والخامسة نجح فيها .

* و ← تقاطع

↲ وبما إنه الحوادث مستقلة .. إذن

التقاطع راح يصير ضرب .

$(0.2)(0.2)(0.2)(0.2)(0.8) =$

↲ بما إنه احتمال النجاح في المحاولة الواحدة = 0.8

إذن إحتمال الفشل = 0.2

* الفرق بين Geom. & Binom :

* كبداية نفس البداية ..

* وللفروض تكون المحاولات مستقلة ومتطابقة .

** إلي يفرق شو إلي استخدمه :

↲ ما احتمال النجاح في □ من △ محاولات ← Binomial

↲ ما احتمال إني أنجح لأول مرة في المحاولة △ ← Geom.

* $X \sim Geom(p)$

- Mean = $\mu = \frac{1}{p}$

- Var = $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$

ex $X \sim Geom(p)$, Mean $\mu = 5$

① $p(x \geq 2)$?

$\mu = \frac{1}{p} = 5 \Rightarrow p = 0.2$

$X \sim Geom(0.2)$

$p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2)$

$= 1 - [\cancel{p(x=0)} + p(x=1) + p(x=2)]$

مابصير الصفر.

$= 1 - [\underset{q}{(0.8)}^{1-1}(0.2) + (0.8)^{2-1}(0.2)]$

② $E(x^2) = ?$

$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{0.8}{(0.2)^2} = 20$

$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

$20 = E(x^2) - (5)^2 \Rightarrow E(x^2) = \square$

Subject: / /

هندسي. فوق

(3.4) Hyper Geometric Distribution :

يكون " without replacement or simentously ".

* هذا نفس الـ Bionomial تماماً الدرس
الفرق هو بدون إرجاع أو مع
إرجاع.

ex Find the probability of getting ① 6 white balls out of the 10 trials.

W	B
8	12

→ draw 10 balls with out replacement.

N = 20

*أنا بدي أسحب ١٠ حكالي 6 بيض
إذن إلي ضل هم 4 سود

(white balls)

- X = number of success out of 10 trials.

- $p(x=6) = \dfrac{\binom{8}{6}\binom{12}{4}}{\binom{20}{10}}$

* الفضاء العيني من بين 20 بدي
أختار ١٠.

* الحادث إني من بين الـ ١٠
إلي أخترتهم بدي 6 بيض.

* يعني كأنه السؤال :
ما احتمال من بين الـ ١٠ إلي
اخترتهم 6 بيض و4 سود.
(6 ↓ من 8 بيض. 4 ↓ من 12 سود)

② more than One white balls out of 10 trials. (ما احتمال إني أحصل أكثر من وحدة بيضة)

يعني ما احتمال النجاح أكثر من مرة.

$p(x>1) = 1 - p(x \leq 1)$

$x = 0, 1$

↓ يعني ولا وحدة بيضة

↓ لو بدي أحل بصورة مباشرة (بدون متممة)
$p(x>1)$ بصير
$x = 2, 3, \dots, 8$

$= 1 - [p(x=0) + p(x=1)]$

$= 1 - \left[\dfrac{\binom{8}{0}\binom{12}{10}}{\binom{20}{10}} + \dfrac{\binom{8}{1}\binom{12}{9}}{\binom{20}{10}}\right]$

③ At least 7 white balls out of the 10 trials.

$p(x \geq 7) = p(x=7) + p(x=8)$

$x = 7, 8, \boxed{9, 10}$

$= \dfrac{\binom{8}{7}\binom{12}{3}}{\binom{20}{10}} + \dfrac{\binom{8}{8}\binom{12}{2}}{\binom{20}{10}}$

* ما أخذت متممة لأنه راح
يصير طويل ..

* لأنه لأني حاولت 10 محاولات
بس أقصى حد 8 كرات بيض.
لأنه بدون إرجاع.
أما مع إرجاع .. بخليهم.

* لو كانوا السود 6 عددهم.

له ما احتمال 3 بيض ? ← صفر (لأني سحبت ١٠ و٣ بيض يعني ٧ سود .. مستحيل)

له ما احتمال 7 بيض ? ... في جواب لأنه 3 سود.

⇒ * $X \sim \text{Hyper Geom}\,(n\,;M,N)$

- $p(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

- Mean $= \mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$

- Var $= \sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-1}{N-n}\right)$

• في المثال السابق :

- $N = 20$ (مجموع الكرات)
- $n = 10$ (عدد الكرات اللي بدو أسحبهم)
- $M = 8$ (عدد W)
- $N-M = 12$ (عدد B)
- $K = 6$

---

*Q (3-4) p 127 : In the experiment of tossing 3 coins assume that you [win if you get at least one head.] success

$\boxed{\text{Geom}}$

Q4 Find the probability that you win for the first time in the 3rd trial.

* التجربة إنو بدو يرمي ٣ قطع نقدية مع بعض.
* راح نفوز إذا طلعت على الأقل صورة.

إذا طلع أكثر من صورة كمان راح أفوز (النجاح)

الفشل إنو إذا ما طلع ولا صورة.

Ω
TTT
TTH
THT
HTT
THH
HTH
HHT
HHH

- X = number of trials till you win for the first time.
- $X \sim \text{Geom}\,(p)$
- $p = p(\text{success for each single } \overset{\text{trial}}{\cancel{\text{trial}}}) = \frac{7}{8}$

$\therefore p(X=3) = q^{k-1}\,p = \left(\frac{1}{8}\right)^{3-1}\left(\frac{7}{8}\right)$

Q3 $E(X) = \mu = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\frac{7}{8}} = \dfrac{8}{7}$

*Geometric Distribution :

- $X \sim \text{Geom}\,(p)$
- $p(X=k) = q^{k-1}p$
- mean $= \mu = \frac{1}{p}$
- Var $= \sigma^2 = \frac{q}{(p)^2}$

- k = 0 غير مسموح
- احتمال إني أنجح لأول مرة.
- identical
- independent

* Hyper Geom. Distribution :

- $X \sim \text{Hyper Geom.}\,(n\,;M,N)$
- $p(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- without replacement

↓N : مجموع الكرات
↓n : عدد الكرات اللي بدي أسحبهم
↓M : عدد success
↓N−M : عدد B

- mean $= \mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$
- Var $= \sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-1}{N-n}\right)$

Subject:...................... / /

Q14 $X \sim B(3, 0.5)$ $x = 0, 1, 2, 3$

$Y \sim B(4, 0.4)$ $y = 0, 1, 2, 3, 4$

X and Y are independent.

c) $P(X+Y > 1) = ?$

* بدل ما أحل بصورة مباشرة بستخدم المتممة
لأنها طويلة.

$\cdot\ p(x+y>1) = 1 - P(x+y \le 1)$

$0+0$
$0+1$
$1+0$

$= 1 - [p(x=0, y=0) + p(x=0, y=1) + p(x=1, y=0)]$

$\cdot\ p(x=0, y=1)$ $(f(0,1) = f_x(0) \cdot f_y(1))$ independent لأنه

هذا عبارة عن joint

$\hookrightarrow = p(x=0) * p(y=1)$

$\downarrow$ من ال Table $X \sim B(3, 0.5)$

$\downarrow$ من ال Table $Y \sim B(4, 0.4)$

$p(y=1) = p(y \le 1) - p(y \le 0)$

ωow ˣ̊ˣ
funy question

وبكمل الباقي.

❀ [The End of The Chapter] ❀

Subject: Ch(4)   /   /

※ Normal Probability Distribution

(4.1) The Normal Distribution:

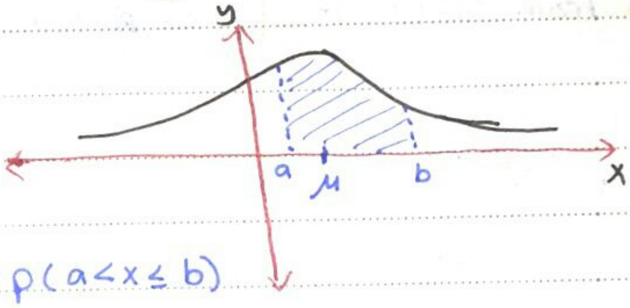
p.d.f:

$$\left[f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} , \quad -\infty < x < +\infty \right]$$

* هنا أول توزيع متصل
* ما بلمس محور السينات
ويكون متماثل حول الوسط
(زي الـ Belled shape)

* $p(a < x < b) = \int_a^b \underset{\sim\sim}{f(x)}\,dx$

"مش إحنا طالع تكامل" الجدول جاهز.



نفسها $\rightarrow = p(a \le x \le b) = p(a \le x < b) = p(a < x \le b)$

وجود المساواة أو عدمها ما بهمني لأنه continuous

* $X \sim N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{بنحولها}} Z \sim N(0,1)$ قياسي standard Normal distribution

ex $X \sim N(70, 36)$ باستخدام $\Downarrow$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ (Z-score)

$X \sim N(45, 16)$

⋮

* أي Normal بدي أحوله إلى standard بعدين بستخدم الجدول .

---

ex The weights (in kgs) of students are normally distributed with mean 70 and standard deviation 6. If a student is chosen randomly, find the probability that his weight (in kgs) will be:

[or find the proportion of students with weights:]

ما نسبة الطلبة إلّي أوزانهم .....:

① less than 75.

- X = the weight of a student
- $X \sim N(\underset{\mu}{70}, \underset{\sigma^2}{(6)^2})$

يتبع الحل ⟶

- $p(x<75)$

* لو اخترنا طالب بشكل عشوائي شو احتمال إنو وزنه أقل من 75

- $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{75-70}{6} = 0.83$

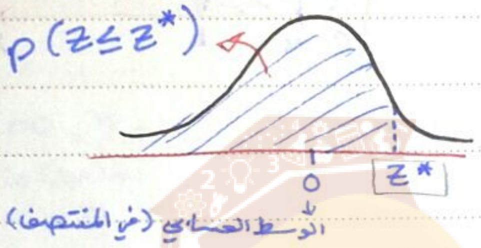
* الجدول مصمم لمنزلتين بعد الفاصلة. (لو في تقريب بنقرب عادي).

$\therefore p(x<75) = p(Z<0.83)$

⇒ From Table (3) [Area Under the normal distribution.]

$[Z \sim N(\underset{\mu}{0},1)]$

* الجدول عبارة عن صفحتين؛ صفحة للقيم الموجبة والصفحة للقيم السالبة.



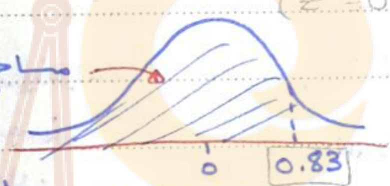
من الصفحة الموجبة ↳ باخذ تلاقي 0.03 إلّي أفقية مع 0.8 إلّي رأسية. بطلع 0.7967

$(Z^*=0.83)$

↳ $p(Z\leq 0.83)$

وجود المساواة أو عدمها لا يؤثر.

$(0.83 = \underset{\text{أفقي}}{0.03} + \underset{\text{رأسي}}{0.8})$



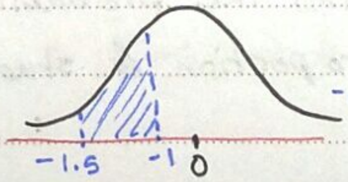
مساحة هذه المنطقة $=0.7967$ وهو ~~[illegible]~~ احتمال إنو ال Z تقل عن 0.83

(بتخيله خط أعداد)

⇒ $p(x\leq 75) = p(Z<0.83) = 0.7967$

② Between 61 and 64

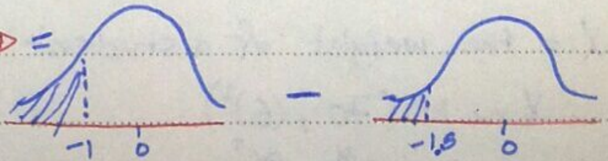
- $p(61<x<64) \longrightarrow = p(-1.5<Z<-1)$
- $Z_{61} = \frac{61-70}{6} = -1.50$
- $Z_{64} = \frac{64-70}{6} = -1.00$



باخذ إلّي تحت ال -1 و بطرح منها إلّي تحت -1.5

$\therefore p(61<x<64) = p(-1.5<Z<-1)$
$= p(Z<-1) - p(Z<-1.5)$
$= 0.1587 - 0.0668$

↳ =

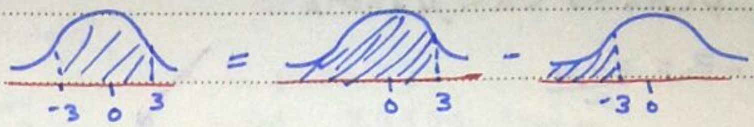


- -1.5 ⇒ من تلاقي 0.00 مع -1.5

(لو استعملت 0.01 يعني -1.51
أو 0.02 → -1.52)

③ Between 52 and 88

- $p(52 < x < 88)$
- $Z_{52} = \frac{52-70}{6} = -3$



- $Z_{88} = \frac{88-70}{6} = 3$

$\therefore p(52<x<88) = p(-3<Z<3) = p(Z<3) - p(Z<-3)$

$= 0.9987 - 0.0013$

$= 0.9974$

* $\frac{10-4}{2} = 3$

ال 10 تبعد عن ال 4

ثلاث اثنينات XD.

على مثالنا

$\frac{88-70}{6} = 3$

* ال 88 بتبعد عن الوسط

3 انحرافات معيارية

يعني ال $\boxed{3}$ تمثل عدد الانحرافات المعيارية

التي تبعد عن الوسط

((∴ يعني ال Z عبارة عن عدد الانحرافات المعيارية بُعداً عن الوسط))

④ exactly 75.

$p(x=75) = 0$

* لأنه هنا عبارة عن تكامل من العدد لنفسه

لا يوجد مساحة.

* مستحيل اختار طالب ويطلع وزنه 75 بالزبط تماماً، لأنه البيانات متصلة إلّا يكون في اختيار عشوائياً

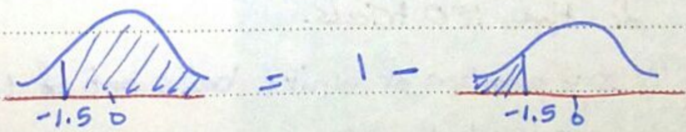
⑤ More than 61

* الجدول مصمم للمساحة تحت

وانا بدي المساحة فوق -1.5.

$p(x > \overset{61}{\cancel{64}})$

$Z_{61} = \frac{61-70}{6} = -1.5$



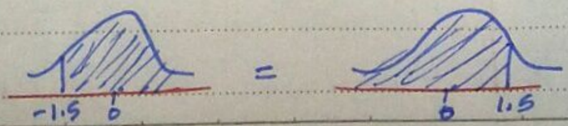
$\therefore p(Z>-1.5) = 1 - p(Z<-1.5)$

$= 1 - 0.0668 = 0.9332$

Another method :

$\Rightarrow p(Z>-1.5) = p(Z<1.5) = 0.9332$

المساحة تحت
الموجب
هي نفسها
المساحة فوق سالب
بسبب التماثل.



ex $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

* مافي داعي أعرف μ و σ لأنني راح أحول لـ Z

- $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$= p(-3 < Z < 2)$

$= p(Z < 2) - p(Z < -3)$

$= 0.9772 - 0.0013$

$\cancel{X \sim N}$

$\cancel{p(X = 75) = 0}$

↳ $Z_{\mu - 3\sigma} = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = -3$

↳ ها $\mu_{\mu + 2\sigma} = \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma} = 2$

مش مطلوب * $X \sim B(n, p) \xrightarrow[\substack{n \geq 30 \\ p < 0.10}]{\text{approx.}} X \sim \text{Poisson}(\mu)$

مش مطلوب * $X \sim \text{Hyper Geom} \longrightarrow X \sim B(n, p)$

مطلوب * (4.2) The Normal approximation of the Bionomial Distribution

$\left[X \sim B(n, p) \xrightarrow{\text{approximation}} X \sim N(\mu, \sigma^2) \right]$

(n) is large ($n \geq 30$)

(p) is moderate

* N large ← يعني أكبر من 30

* p moderate ← يعني كل ماتكون حولين النص أحسن .. بس عادي لو كانت
معتدل

0.1 or 0.2 or 0.3

بنعتبرهم moderate

- $\mu = np$
- $\sigma^2 = npq$

ex

W	B
6	14

→ Draw 100 with replacement

Find the probability of getting ① less than 40 white balls out of the 100 trials.

* واضح إنه Bionomial

خطوة $\boxed{1}$ بنحول من Bionomial إلى Normal عشان $n \geq 30$ عن طريق $\left(\begin{matrix} \mu = np \\ \sigma^2 = npq \end{matrix}\right)$

- X = number of white balls out of 100 trials
- $p = \frac{6}{20} = 0.3$
- $X \sim B(\overset{n}{100}, \overset{p}{0.3})$
- $p(X < 40) = ?$

- $X \sim B(100, 0.3) \xrightarrow[\substack{n = 100 \geq 30 \\ p = 0.30 \\ \text{(moderate)}}]{\text{approx.}} X \sim N(30, \boxed{21})$

- $\mu = np = 100(0.3) = 30$
- $\sigma^2 = npq = 100(0.3)(0.7) = \boxed{21}$

يتبع حل السؤال ⟶

تكملة حل السؤال

خطوة 2 المطلوب في السؤال هو في حالة إذا كان Bion. واحنا حولناه إلى Nom. فبروح آخذ نصف للمنطقة بين المطلوب والي غير مطلوب عن طريق (± 0.5)

$X \sim B(100, 0.3)$ $\qquad$ $X \sim N(30, 21)$

$p(x<40) \cong p(x \leq 39.5)$

$x = 0, 1, \dots, 39$

(إذا حطيت المساواة أو لا ما بتفرق).

هون الشغل

* السؤال فعلياً Bion. بس إحنا بدنا نقربه Nomial

* في Bionomial disc. $p(x<40) = p(x \leq 39)$

في continuous $p(x<40) =$

مسموحة 39.999

39.601

⋮

خطوة 3 هيك صار معنا، صح x أكبر أو أقل من (□.5) وهنا هون صرنا في الـ Nomial .. فبنطبق عليه الـ ($Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$) عشان نحول الـ x (=□.5) إلى Z ونجيب بنحل عادي من جدول الـ Nomial.

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

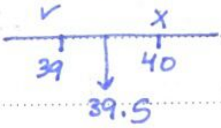
$= \frac{39.5-30}{\sqrt{21}} = 2.07$

$p(x \leq 39.5) = p(Z \leq 2.07)$

$= 0.9808$

\#

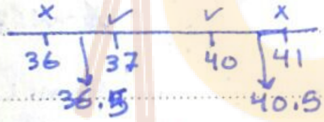
* فعشان أغطي الفجوة بين الـ Bionomial الي لازم يكون 39 لأنه discrete
وبين Nomial الي عادي يكون 39.999.. لأنه continuous
باخذ نصف المنطقة بين المطلوب والي غير مطلوب = ~~39.5~~ 39.5



② $p(36 < x \leq 40)$

$X \sim B(100, 0.3)$

$x = 37, 38, \cancel{93}\ 39, 40$



approx. ⇓

$\cong p(36.5 \leq x \leq 40.5)$ → وجود المساواة أو عدمها ما بفرق.

$X \sim N(30, 21)$

$Z_{36.5} = \frac{36.5-30}{\sqrt{21}} = 1.42$

$Z_{40.5} = \frac{40.5-30}{\sqrt{21}} = 2.29$

$\therefore = p(1.42 \leq Z \leq 2.29)$

$= p(Z \leq 2.29) - p(Z \leq 1.42)$

$= 0.9890 - 0.9222$

من الجدول
$\left(\begin{array}{l} 2.29 = 0.09 + 2.2 \\ 1.42 = 0.02 + 1.4 \end{array}\right)$

إذا جاي (الدكتور)

* هو يا بدي أزيد 0.5 أو أطرح 0.5

- إذا في مساواة بزيد 0.5
- إذا مافي مساواة بطرح 0.5

عبالي أحفظها حفظ ..

هون العكس..

- إذا في مساواة بطرح 0.5
- إذا مافي مساواة بزيد 0.5

* إذا ($x > □$) (أكبر):
- يوجد مساواة ← بطرح 0.5
- لا يوجد مساواة ← بزيد 0.5

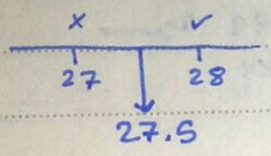
* إذا ($x < □$) (أقل):
- يوجد مساواة ← بزيد 0.5
- لا يوجد مساواة ← بطرح 0.5

[وجود المساواة في السؤال نفسه]

③ $p(x \geq 28)$

$x \sim B(100, 0.3) \quad \cong \quad \cancel{p}\, x \sim N(30, 21)$

$x = 28, 29, \dots, 100$



$\cdot\, p(x \geq 27.\cancel{5}5)$

$\cdot\, z = \frac{27.5-30}{\sqrt{21}} = -0.55$

$\therefore p(z \geq -0.55) = p(z \leq 0.55)$

$= 0.7088$

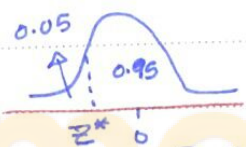
مثال على الدرس السابق لهذا [مرتبط مع سؤال الأوزان تبع الطلاب]

ex $X \sim N(70, 6^2)$, Find the weight above which 95% of the students. (or Find the 5^{th} percentile of the distribution of x)

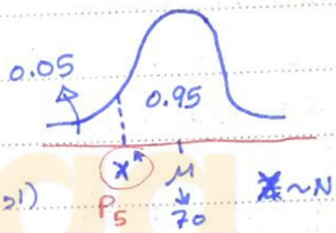
يعني المساحة تحته 0.05

$z^* = -1.645$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$



$z \sim N(0,1)$



$\cancel{x} \sim N(70, 6^2)$

$-1.645 = \frac{x^* - 70}{6}$

$x^* = \boxed{}$ // (this is the wanted)

$\downarrow$ P_5

* هسا العكس : (برجع رجوعي)

① : معطيني المساحة كتها .. [0.05]

② ← بروح يطلع z [اللي هي $z^* = -1.645$]

③ ← نجدين من z يطلع x [$x^* =$]

* المساحات موجودة بنص الجدول :

- هاي المساحة ماراح ألاقيها (0.05)

• بروح على الجدول على صفحة الأعداد السالبة وبدور على مكان تواجد 0.05

• هاد الرقم جاي بالوسط تماماً بينه :

z	0.04	0.05
-1.6	~~0.0495~~ 0.0505	~~0.0505~~ 0.0495

0.045 ↓

↑ 0.05 رقمنا

* رقمنا 0.05 يقابله 0.045 (بين 0.04 و 0.05)

الذي يقابلهما -1.6

⇐ إذن الرقم -1.645

$(= -1.6 + 0.45)$

Subject:……………………

* (4.3) The central Limit Theorem: (هادا الكشف والستبتر القادم نفس الفكرة)

أول تعبير
1.

If arandom sample $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is chosen from apopulation with mean (μ) and varience (σ^2)

Then for large n $(n \geq 30)$:

[The distribution of the sample mean is normal with mean (μ) and varience $(\frac{\sigma^2}{n})$.]

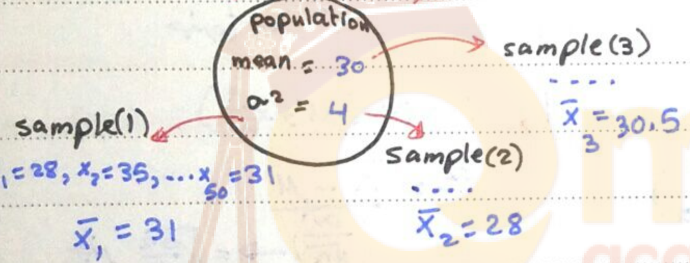
ثاني تعبير
2

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

تغير الـ $\bar{X}$ من عينة لعينة لها هذا التوزيع (Normal)

على سؤالنا $\bar{X} \sim N(30, \frac{4}{50})$

(large n = 50)



* عندي population ..

إله وسط حسابي μ وإله σ^2

فرضاً كان الوسط الحسابي 30

وكان var = 4

* بدنا نروح نختار عينة ولها حجم (large n)

x_1: المشاهدة الأولى / x_2: المشاهدة الثانية

- مثلاً إنو الـ n = 50.

- تخيل الـ population هم جميع الطلاب إلي قدموا إمتحان الإحصاء. اعتبرنا إنو عددهم 1000

إختارنا عينة بتتكون من 50 طالب ..

$sample_1$: [الطالب الأول علامته 28 = x_1, $x_2 = 35$, .., $x_{50} = 31$]

فرضاً طلع الوسط الحسابي $\bar{x}_1 = 31$ للـ 50 علامة.

$sample_2$: $[\bar{X}_2 = 28]$, $sample_3$ $[\bar{X}_3 = 30.5]$

عينة أخرى اخترنا (علاماتهم تغيرت)

- $X \sim B(10, 0.4)$

$X = 3$

يعني ما احتمال أنجح 3 مرات من 10

يعني X متغير عشوائي

وإذي متغير عشوائي المفروض يخضع لتوزيع.

∴ [يعني الـ $\bar{X}$ تتغير من عينة للعينة] يعني المفروض لها توزيع

ثالث تعبير
3 Population

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\text{large } n \geq 30} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Subject: .... / /

ex A random sample & size 200 is chosen from apopulation with mean $\mu = 60$ and std. dev $\sigma = 5$.

Find the prob. that the sample mean is ① more than 59. ?

- $p(\bar{x} > 59)$
- $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- $\bar{x} \sim N(60, \frac{5^2}{200})$

* أنا بدي أروح أختار عينة فيها 200 شخص (لسا ما اخترتها).
* لو رحت اخترت هاي العينة شو احتمال إنو الوسط الحسابي لها يكون يتعدى 59 ..
* مادام حجم العينة كبير .. خلص
* السؤال طالب : ←

$\rightarrow$ $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{59 - 60}{\frac{5}{\sqrt{200}}} = -2.83$

$\therefore = p(z > -2.83)$

$= p(z < 2.83) = 0.9977$

* $X \sim N(\mu, \boxed{\sigma^2})$
 $z = \frac{x - \mu}{\boxed{\sigma}}$ ← جذرها

 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
 $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \rightarrow = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ جذر

② between 59 and 60.5 ?

- $p(59 < \bar{x} < 60.5)$
- $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = \bar{x} \sim N(60, \frac{5^2}{200})$
- $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$z_{59} = \frac{59 - 60}{\frac{5}{\sqrt{200}}} = -2.83$

$z_{60.5} = \frac{60.5 - 60}{\frac{5}{\sqrt{200}}} = +1.41$

$\therefore p(59 < \bar{x} < 60.5) = p(-2.83 < z < 1.41)$

$= p(z < 1.41) - p(z < -2.83)$

$= 0.9207 - 0.0023$

Subject:.................... / /

ex The weight of orange boxes have mean 10 kgs and std. dev. 2 kgs.
If 100 boxes will be loaded to a car with the threshold 1010 kgs. (الحمولة القصوى)
find the probability that the car will break down?

- $p\left(\sum_{n=1}^{100} X_n > 1010\right)$

* ما احتمال إنو يكون مجموع أوزان ال 100 صندوق إذا تعدّى ال 1010 راح تنكسر السيارة.

$\hookrightarrow p\left(\frac{\sum_{n=1}^{100} X_n}{100} > \frac{1010}{100}\right) = p(\bar{X} > 10.1)$

- $\mu = 10$, $\sigma = 2$, $n = 100 \geq 30$

$\bar{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$

* لما أقسم مجموع الأوزان على 100 راح يعطوني ال $\bar{X}$ ~~mean~~.

$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10.1 - 10}{\frac{2}{\sqrt{100}}} = 0.5$

$\therefore = p(Z > 0.50) = p(Z < -0.50) = 0.3085$ #

---

* - Distribution of $\bar{X}$
- " " $\hat{p}$
- " " s^2

} نفس الفكرة

الافكار المتبقية لنهاية الفصل.

* C. I

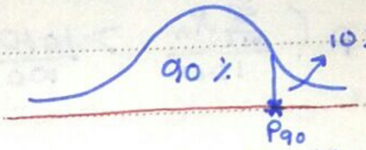
* Test

Subject:...................... / /

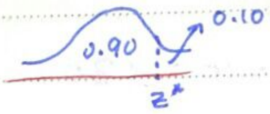
[Ch3+Ch4 هذا السؤال يلخص]

Q(4-8)-p(137): The temperatures of summer days this year are normally distributed with mean $\mu = 38°C$ and std. dev. $\sigma = 4°C$

Q_4: The smallest temperature of the hottest 10% of the temperature is ------?



- X = the temperature of a summer day.
- $X \sim N(\overset{\mu}{38}, \overset{\sigma^2}{4^2})$



- $p(Z \le Z^*) = 0.90$

↳ $Z^* = 1.28$

← أخذنا أعلى 10% ، وبين أقل درجة حرارة فيهم (عند النجمة *)

* أقرب اشي لل 0.90 :
في الجدول هو 0.8997
يقابله 1.2 & 0.08

* هون راح أرجع رجوع :
من المساحة ← بطلع Z ← ومن Z بطلع X

- $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$1.28 = \frac{x-38}{4}$

$\Rightarrow P_{90} = X = 43.1$

Q_5: If a day is taken at random, what is the prob. that its temperature will exceed 43.1°C ?

* اخترت يوم من أيام الصيف يعني X
ما احتمال إنو تتعدى درجة حرارة
هذا اليوم إلي اخترته 43.1 ؟

- $p(X > 43.1)$
- $X \sim N(38, 4^2)$

↳ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{43.1-38}{4} = 1.28$

* هذا السؤال محلول من الفرع
السابق .. والجواب هو 0.10

↳: $= p(Z > 1.88) = p(Z < -1.28)$

$= 0.1003 \cong 0.10$

Q6: If three days are taken at random, what is the probability that at least one day will have [temp. more than 43.1] °C ?

* هذا Bionomial

- Y = number of days with temp. > 43.1 هذا هو النجاح

* ما احتمال انجح مرة على الأقل

- $Y \sim B(\overset{n}{3}, \overset{p}{0.10})$ out of 3 trials (days)

* يعني ما احتمال أنجح مرة من 3 مرات.

↳ $p = p(X > 43.1) = 0.10$

the day's temp. > 43.1

مرتين من 3

٣ مرات من ٣

∴ $p(y \geq 1) = 1 - p(y = 0)$

$= 1 - 0.729$

$y \sim B(3, 0.10)$

Q7: If 50 days are taken at random, what is the probability that at least 10 days will have temp. more than 43.1 ?

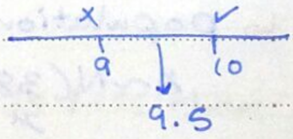
- W = number of days with temp. > 43.1 out of 50 trials (days)
- $W \sim B(\overset{n}{50}, \overset{p}{0.10})$
- $p(W \geq 10) \cong p(W \geq 9.5)$

↳ $W \sim B(50, 0.10) \xrightarrow{\text{approx.}} W \sim N(5, 4.5)$

$n = 50 \geq 30$
$p = 0.10$ moderate

$\mu = np = 50(0.10) = 5$
$\sigma^2 = npq = 50(0.10)(0.90) = 4.5$

أصبح سؤالنا هذا الجزء.



- $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{9.5 - 5}{\sqrt{4.5}} = 2.12$

- $p(W \geq 9.5) = p(Z \geq 2.12)$

$= p(Z \leq -2.12) = - - - - -$

هذا معلوماته

Q8 علىالشابتر 5 If 9 days are taken at random, what is the probability that their temperature average exceeds the true mean by 2.?

$$p(\bar{x} > \underset{38}{\mu} + 2) = p(\bar{x} > 40)$$

* اخذت عينة من 9 ايام
- شو احتمال إنو هاي العينة الي بدي اختارها يتعدى الـ true mean (الي هو من بداية السؤال) = 38 يتعدى بمقدار 2

* central limit theorem:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{population}\\ \text{mean} = \mu\\ \text{varience} = \sigma^2\end{array}} \xRightarrow{\text{large } n,\ n \geq 30} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

بغض النظر عن توزيع الـ population

هذا ch5 *

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{population}\\ X \sim N(\mu, \sigma^2)\end{array}} \xRightarrow{\text{for any } n} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

لازم الـ population يكون Normal

* الـ n في سؤالنا مش كبيرة والـ popul. ← Normal

في سؤالنا ⇒ In our question:

- population

$$\underset{\mu}{X} \sim N(38, \underset{\sigma^2}{4^2}) \xRightarrow{n=9} \bar{X} \sim N\left(38, \frac{4^2}{9}\right)$$

$$\therefore p(\bar{x} > 40) = p(Z > 1.5) = \ldots$$

$$\rightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 38}{\frac{4}{\sqrt{9}}} = 1.5$$

Subject: Ch(5)   /   /

*Sampling Distributions:

*(5.1) The Distribution of the Sample mean: [Dist. of $\bar{x}$]

* Central limit Theorem:

① Population: Mean = μ, varience = σ^2 $\xrightarrow[n \geq 30]{\text{large}}$ $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

② population: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\xrightarrow{\text{For any } n}$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

③ t- distribution

→ population معلومات تبعت ال

ex [The weights of newborn babies are normally distributed with mean 3 kgs], [If a sample of size 15 is chosen and showed std. dev. 1.5 kgs.] sample معلومات تبعت ال

① Find the propability that the sample mean is less than 3.68 kgs. ? → $P(\bar{X} < 3.68)$

* population : $X \sim N(\overset{\uparrow}{\underset{3}{\mu}}, \overset{\uparrow}{\underset{\text{unknown}}{\sigma^2}})$

* لما أتعامل مع populati
بستخدم (μ ، σ)

* sample : $n = 15$, $S = 1.5$

* لما أتعامل مع sample
بستخدم ($\bar{X}$ ، S)

: إذن راح أستخدم ال t - dis. في هذا السؤال.

* قبل الإجابة عن السؤال لازم أعرف إنو : ← حتى في الأسئلة السابقة.

يتبع الحل ⟶

① Is the population normally distributed? (yes)

② Is the varience σ^2 unknown? (Yes)

③ Is the sample size n small? ($n<30$) (Yes)

← إذا واحد منهم (No) عادةً بستخدم ال Normal
↑ لما ① أو ②

⇐ ↓ إذا جاوبت الثلاثة (yes) بستعمل ال t- distribution

→ $p(\bar{x}<3.68)$
t-dist.

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{3.68-3}{\frac{1.5}{\sqrt{15}}}=1.75$$

* قانون الـ t نفس الـ Z

← سبب الفرق إنو إذا بدي:

- إتعامل مع الـ Normal بروح على جدول الـ Z
- إذا بدي أتعامل مع t-dist. بروح على جدول الـ t

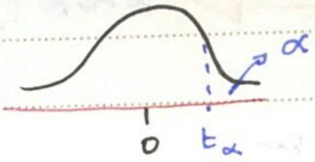
* إذا المعلومة في الـ population مش معروفة

إذن المفروض إنو الـ sample يمثلها.

يستخدم الـ S بدل σ .

* أول خطوة لازم أعملها هي (degrees of freedom)

$\boxed{df=n-1} \rightarrow =15-1=14$



إذا كان بدي أستخدم الـ Normal

$$\boxed{\begin{array}{c}\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\\ Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\end{array}}$$

في الجدول

* ما يقابل df ← 14

* ما يقابل $t_{0.100}$ → 1.345
$t_{0.050}$ → 1.761

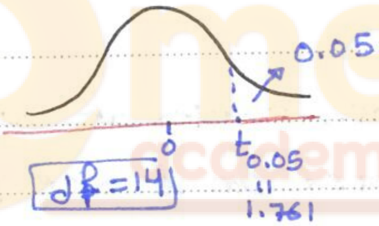
* الرقم (1.75) إلي طلع معنا أقرب لـ (1.761)

* جدول الـ t مصمم للمساحة (فوق)

* لكن الـ Z مصمم للمساحة (تحت.)

$\therefore p(t<1.75)=0.95$

(إحنا بدنا المساحة تحتها)



$\boxed{df=14}$

** مجرد ما إجاني سؤال له علاقة بـ $\bar{x}$:

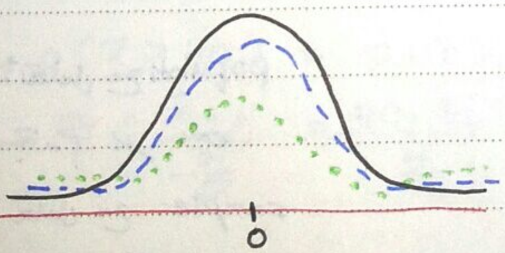
$p(41<\bar{x}<51)$ أو $p(\bar{x}>1.3)$

← أول سؤال لازم أجاوبه قبل بدء الحل

هو: هل أستعمل الـ Normal (Z) أم الـ t ؟!

وإلي بقرر الثلاث أسئلة السابقة.

* الفرق بين الـ t & Z :



→ ——— $Z\sim N(0,1)$

\- - - - t-dist (df = 20) → حجم العينة 21

.... t-dist (df = 7)

* في t-dis إذا صار حجم العينة 30 إذن تقريباً بتنطبق على Z

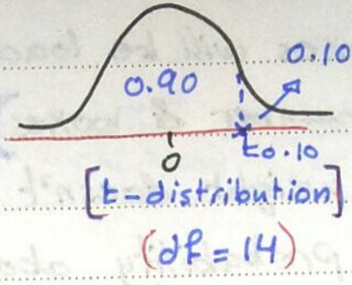
* يعني إذا حجم العينة كبير (n≥30) بستخدم الـ Z

② Find the 90th percentile of the distribution of $\bar{x}$?

* $t_{0.10} = 1.345$

*هون بدنا نرجع رجوع :

من المساحة ← يطلع t ← ومن t بطلع $\bar{x}$



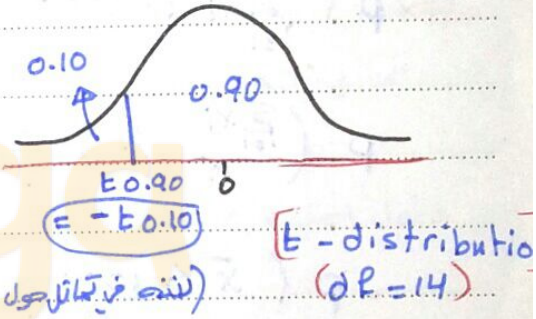
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$1.345 = \frac{\bar{x} - 3}{\frac{1.5}{\sqrt{15}}}$$

$\Rightarrow \bar{x} = 3.5$ #

③ Find the 10th percentile of the dist. of $\bar{x}$?

$-t_{0.10} = -1.345$

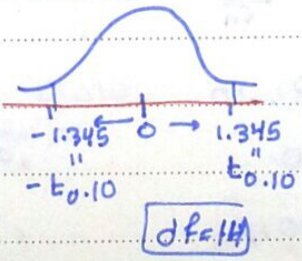


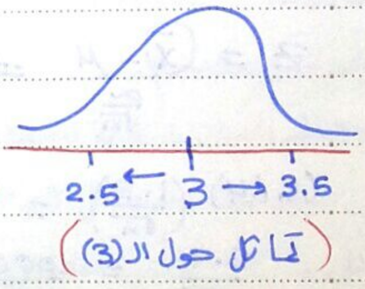
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$-1.345 = \frac{\bar{x} - 3}{\frac{1.5}{\sqrt{15}}} \Rightarrow \bar{x} = -3.5 \ \cancel{\#}$$ (لانه في تماثل حول الصفر)

لأ، طبعاً X

$\boxed{\bar{x} = 2.5}$ ✓





ex (5.1.3) : ~~(page 149)~~ (163) The weights of orange boxes are normally distributed with mean 10 kgs. and std. dev. 1.5 kgs.

الحمولة القصوى

If a number of boxes will be loaded in a car with threshold 1000 kgs. [Find the number of boxes] to be loaded to the car so that their total weight doesn't exceed the threshold of the car with probability about 0.95.]?

- population : $N(\underset{\mu}{10}, \underset{\sigma^2}{1.5^2})$

- حجم العينة مش معروف
لـ : أصلاً هو المطلوب

- Sample : $n = ?$

- Normal → ✓ (yes)
- unknown σ → X (No)

$\Downarrow$

so Normal (Z)

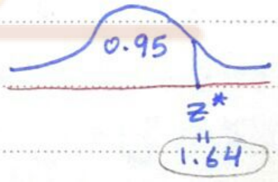
$$\Rightarrow p\left(\sum_{i=1}^{\overset{\text{المطلوب}}{\boxed{n}}} x_i \le 1000\right) = 0.95$$

$$p\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \le \frac{1000}{n}\right) = 0.95$$

* إذن من المساحة ← يطلع Z

اجمع

- $$p\left(\bar{x} \le \frac{1000}{n}\right) = 0.95$$



- $$Z = \frac{\boxed{\bar{x}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \frac{\frac{1000}{n} - 10}{\frac{1.5}{\sqrt{n}}} = 1.64$$

$$(1.64)\left(\frac{1.5}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1000}{n} - 10$$

$$\frac{2.46}{\sqrt{n}} = \frac{1000}{n} - 10$$

* $ax^2 + bx + c = 0$

* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

أو $*(n)$
$$\longrightarrow 2.46\sqrt{n} = 1000 - 10n$$

$$10n + 2.46\sqrt{n} - 1000 = 0$$

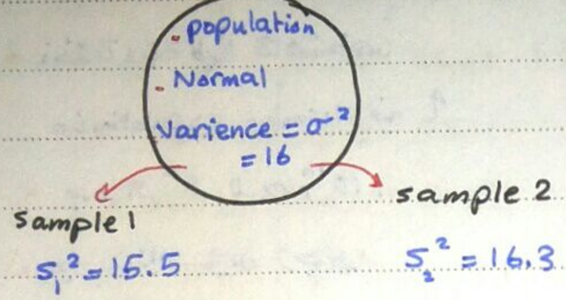
$$10(\sqrt{n})^2 + 2.46\sqrt{n} - 1000 = 0$$

$$\sqrt{n} = \frac{-2.46 \pm \sqrt{(2.46)^2 - 4(10)(-1000)}}{2(10)}$$

$$\sqrt{n} = \frac{-2.46 + \sqrt{(2.46)^2 - 4(10)(-1000)}}{2(10)} = 9.77$$

$$\Rightarrow n = (9.77)^2 = 95.5 \cong 96$$ عدد الصناديق #

(5.2) The distribution of the sample varience: [Dist: of s^2]



* الـ s^2 بتتغير من عينة الى عينة

$$\left[\underset{\text{Chi-square}}{x^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \right]$$

* زي ما الـ (Z) علامة معيارية

* فـ الـ (x^2) ايضا علامة معيارية.

ex (5.2.1) If a sample of size n=6 is chosen from a population with varience $\sigma^2 = 10$.

Find the probability that the sample varience is :

* المطلوب : ما احتمال انو الـ var: للعينة الي إخترتها يتعدى 18.4727 ؟

Ⓐ more than 18.4727

- $P(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sample varience}}}{s^2} > 18.4727)$

* أول اشي لازم أحول الى علامة معيارية.

- $x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(6-1)(18.4727)}{10}$
$= 9.23635$

* x^2-dist : table (5)

- $p(s^2 > 18.4727) = p(x^2 > 9.23635)$
$= \boxed{0.100}$ #

* الجدول مصمم :

* معظم البيانات مايلة لجهة اليسار

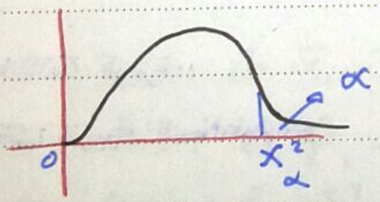
يعني مش متماثل (الرسم البياني)

* في t و Z الثنين متماثلين حول الصفر

← هون الرسمة بادية من الصفر.. مش متماثل.

- $df = n - 1 = 6 - 1 = 5$

- $df = 5$ مع $x^2_{0.100}$ * لما دورنا ~~[illegible]~~ على الرقم لقيناه مع



* بدور على الرقم 9.23635 في الصفحتين.

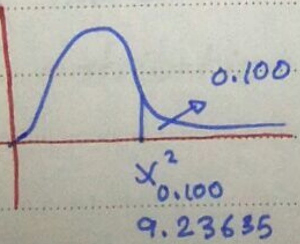
عند الخمسة (موجودة في الصفحتين)

* هاد الرقم مش موجود في الصفحة الأولى عند الخمسة

موجود في الصفحة التانية (عند الخمسة).

(اذا مش نفسه تماماً.. بختار الأقرب)

* إنا بتعامل مع المساحة وفوق.



بدأطلب أقل فهي للمتممة 0.900

② ex $X_1, X_2, \dots, X_{13} \sim N(\mu, \sigma^2 = 36)$

Find the 10th percentile & the distribution of the sample varience.?

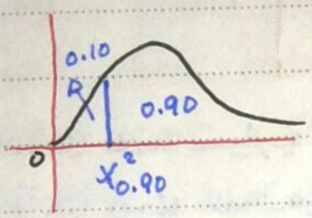
* اخترنا عينة فيها 13 شخص

من population Normal فيه ?

* بده الـ S^2 للـ 10th perce.

لـ يعني هذا السؤال رجوع؟

* معطيني مساحة



- $df = n-1 = 12$
- $\chi^2 = 6.30380$

- $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$6.30380 = \dfrac{(13-1)S^2}{36}$

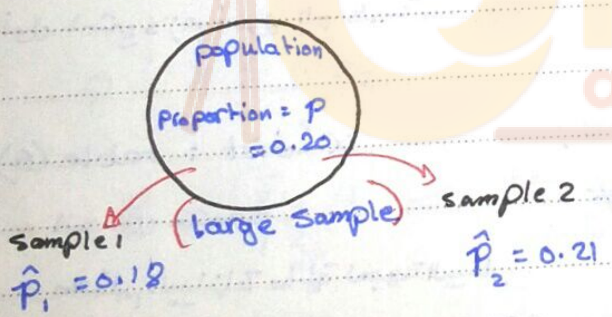
* مجرد ما يسألني عن الـ S^2

ما عندي غير خيار واحد ← χ^2

$\Rightarrow P_{10} = S^2 = \dots\dots$

(5.3) The Distribution of the Sample Proportion: [Dist. of $\hat{p}$]

نسبة النجاح



* مش بشرط الـ population يكون Normal.

* أنا هون مهتم بنسبة النجاح.

* إذا ما في (٨) : p ← إذن نسبة النجاح [illegible] للـ population

في : $\hat{p}$ ← إذن نسبة النجاح للـ sample

* For large sample:

$$\left[\hat{p} \sim N\left(\underset{\mu}{p}, \underset{\sigma^2}{\frac{pq}{n}}\right)\right]$$

* العينة لما كانت كبيرة..

لازم تكون قريبة للـ population

* من جدول الـ Normal

ex The proportion of defective items is 20%

choosing a sample of size $n = 100$.

Find the prob. that the proportion of defective items in this sample is :

① more than 0.18

population proportion ← $p = 20\%$ *

نسبة النجاح في ال sample * $P(\hat{p} > 0.18)$ ......

* هون (التالف هو النجاح)

* حجم العينة كبير ($n = 100$)

↳ Normal

② between 0.18 and 0.23

. $P(0.18 < \hat{p} < 0.23)$

. $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$

. $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. $\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$

↳ $z = \cancel{\bar{x}}\ \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ↳ $z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$

↳ $Z_{0.18} = \frac{0.18 - 0.20}{\sqrt{\frac{(0.20)(0.80)}{100}}} = -0.50$

↳ $Z_{0.23} = \frac{0.23 - 0.20}{\sqrt{\frac{(0.20)(0.80)}{100}}} = +0.75$

. $P(0.18 < \hat{p} < 0.23) = P(-0.50 < Z < 0.75)$

$= P(Z < 0.75) - P(Z < -0.50)$

$= 0.7734 - 0.3085$ #

* (5.4) Dist. of $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

* (5.5) Dist. of $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

* (5.6) Dist. of $\frac{s_1^2}{s_2^2}$

مش مطلوب

. F- distribution → مش مطلوب

[The End of the Chapter]

** Concepts & Statistical Inference

1 *(6.1) Concepts & Estimation: "مفاهيم التقريب"

[المكتوب هو المطلوب فقط.]

↳ The sample mean ($\bar{x}$) is a suitable point estimator of the population mean (μ).

* The sample varience (S^2) is a suitable point estimator of the population varience (σ^2).

* The sample proportion ($\hat{p}$) is a suitable point estimator of the population proportion (p).

2
- $E(\bar{x}) = \mu$
- $E(\hat{p}) = p$
- $E(s^2) = \sigma^2$

} لا محاباة (عادل) ⇒ Unbiased Estimation

1 • بدي أجيد الوسط الحسابي لأطوال الذكور في الأردن إلّي أعمارهم فوق الـ 20 سنة

↳ معناه بدي أجيد الوسط الحسابي للـ population

* عشان أجيد هذ الوسط الحسابي للـ population يروح أختار عينة منطقية.. والوسط الحسابي للـ sample بعتبره تقدير كويس للوسط الحسابي للـ population

* المعلومة للـ sample بعتبرها تقدير كويس للمعلومة إلّي في population.

* استخدمنا كلمة point لأنه جواب الـ S^2 و $\hat{p}$ و $\bar{x}$ جوابه رقم ← نقطة.

2 • biased ← معناها: محاباة ← انحياز (تحيّز)

* إذا كان الوسط الحسابي $\left(E(\overset{s^2}{\underset{\hat{p}}{\bar{x}}})\right)$ للمعلومة في الـ sample يساوي الوسط الحسابي للمعلومة في population فهو unbiased

* إذا كان لا يساوي فهو biased.

* (6.2) Estimations by confidence Intervals :> (C.I)

بتشبه سؤال الكتاب **ex** The salaries of teachers in Jordan for 2010 are normally distributed with std. dev. $\sigma = 60$ JD, The average salary based on asample of ~~400~~ 100 teachers was 320 JD per month.

① what is the point estimate of (the mean 2010 salaries) μ and its (S.E). ? → يعني Standard Error for $\bar{x}$

مفتاح ال ch ② Find a 90% confidence interval for the mean 2010 salaries?

① . Population → $N(\overset{\text{unknown}}{\mu}, 60^2)$

. Sample → $n = \cancel{400}\ 100$, $\bar{x} = 320$

$\Rightarrow$ $\bar{x} = 320$ is apoint estimator of μ

* المعلومة في ال sample تقدير مناسب للمعلومة في Population

* $S.E(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6$

or standard deviation of تغير ال ($\bar{x}$)

or الانحراف المعياري نفسها.

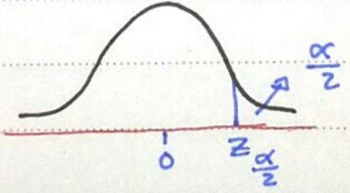
* بستعمل ال Z مش ال t لأنه في أحد الأسئلة No Varience لأنه is known.

② ~~Construct a~~. the 2010 mean monthly salaries $= \mu$

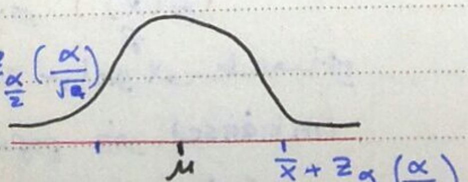
. 90% C.I for μ

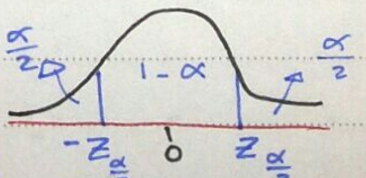
. $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

. $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\overset{\text{سيجما}}{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$



* $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$





$\bar{x} \sim N(\mu, \alpha^2)$ $Z \sim N(0,1)$

$\left(Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)$

لو حطينا بدل X ← μ يصير الجواب 0.

العلاقة بينهم

تتبع الحل →

* 90% C.I for μ :

$$\bar{x} \pm Z_{\boxed{0.05}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$(1-\alpha)100 = 90$

$1-\alpha = 0.90$

$\alpha = 0.10 \longrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{2} = 0.05}$ #

$= 320 \pm \boxed{1.64} \left(\frac{60}{\sqrt{100}}\right)$

$= 320 \pm 9.84 \longrightarrow = (320-9.84 , 320+9.84)$

من الجدول

$\longrightarrow = \boxed{(310.16 , 329.84) \ \#}$

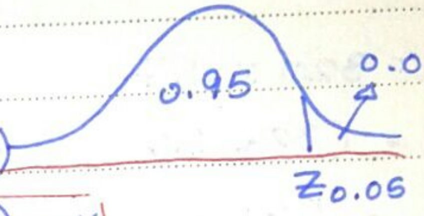
(جدول الـ Z)

* الجدول مصمم للمساحة تحت

* قبل ما أبدء لازم أقرر إذا راح أستخدم Z or t

① Is population normal ? → yes

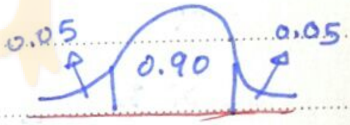
② Is population varience unknown ? → No



* حجم العينة كبير فما بهمني شو الـ population

بس مادام الـ population ← Normal

\+ varience ← known



* الجدول لا يوجد فيه 0.95 / بس عنا 1.6

فيه 0.9505 وفي 0.9495

ويقابلهم 0.05 و 0.04

وهاد الرقم بينهم، فبيقابله 0.045

So $Z_{0.05} = 1.645 \xrightarrow[\text{كتب}]{\text{بس الكتاب}} 1.64$ (لما بتفرق كتير)

* أنا متأكد بنسبة 90% إنو الـ population mean ماراح يطلع ويتعدى الفترة (Interval) إلي طلعت معي (310.16, 329.84)

وكمان الفترة إلها حد أدني وحد أعلى (lower bound of C.I , upper bound of C.I)

upper bound ← $\bar{x} + Z_{0.05}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ← بشكل عام ***

lower bound ← $\bar{x} - Z_{0.05}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ←

* في الفرع الأول قدرت مجال بنقطة

* أما الفرع الثاني فحكينا مجال للخطأ فقدرت المجال بفترة، عشان الثقة.

* $\left[Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] \longrightarrow$ error estimation

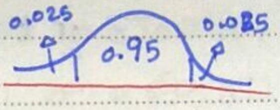
(الخطأ بتقدير الفترة)

③ Find a 95% C.I for μ ?

[illegible]

- $\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

* إنو لما أزيد ثقتي .. بكبّر الفترة.



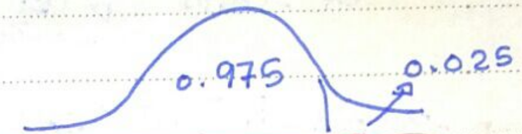
* معنى إنّي أزيد الثقة يعني

- $\bar{x} \pm Z_{0.025}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

بدي أكبر الفترة .. عشان

~~أكثر~~ أوسع مجال إنّي ما توقعت في الخطأ.

$= 320 \pm 1.96\left(\frac{60}{\sqrt{100}}\right)$



$= 320 \pm 11.76$

$= (320 - 11.76 \, , \, 320 + 11.76)$

$= (308.24 \, , \, 331.76)$

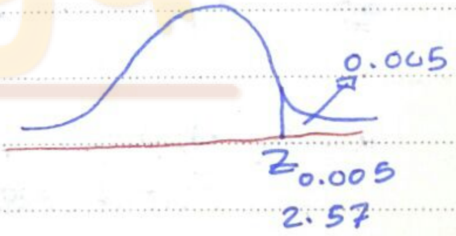
معنى هذا الجواب
* أنا متأكد بنسبة 95%
إنو الـ population mean ما راح يتعدى هاي الفترة.

④ Find a 99% C.I. for μ ?

$\alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$

* هذا السؤال كامل على Z

- $\bar{x} \pm Z_{0.005}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$



$= 320 \pm 2.57\left(\frac{60}{\sqrt{100}}\right) = \text{-----}$

* عادة في الأسئلة ما بجيبوا غير 90% & 95% & 99%
فقيمة الـ Z راح تكون نفسها تبعت هاي الأسئلة
(إذا ما غيروا قيمة الثقة ونسبتها)

* ما في شي 100% لأنه معناها إنو المساحة صفر
ومستحيل تكون المساحة صفر .. لأنه مهما صغرت المساحة راح يضل في
مساحة وما راح توصل الصفر راح تكون $Z = \pm\infty$ (لأنه ما راح يلمس الـ x-axis)

* (ماهام Z إلّي هو Normal)

- 90% C.I for μ → $Z_{0.05} = 1.64$

- 95% C.I for μ → $Z_{0.025} = 1.96$

- 99% C.I for μ → $Z_{0.005} = 2.57$

---

* (6.3) Determination of the sample size:

ex A researcher wants to estimate the average weight of male students at the university of Jordan. In a preliminary study (دراسة ميدانية), the population varience is $\sigma = 6$ kgs. How large a sample should be to estimate the ~~mean weight of~~ population mean by 90% C.I to within ~~2~~ 0.5 kgs. ?

- إذا واحد بدو يجري تجربة وبدو يوخذ عينة السؤال الأول .. ماحجم العينة المناسب؟!
- * حدد السؤال إنه الذكور فقط لأنه في فرق بين أوزان الذكور وأوزان الإناث.

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ
- $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

* في عندي باحث بدو يقدر الـ μ
* منذ دراسة سابقة كان $\sigma = 6$
* سبألني كم حجم العينة المناسب عشان أقدر الـ population mean بثقة 90%

- 90% → $\alpha = 0.10$ → $\frac{\alpha}{2} = 0.05$
→ $Z_{0.05} = 1.64$

* حكينا إنو $Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ إنه الـ error of estimation يعني كم سامح لنفسي تبعد إلّي هو نفسه في هذا السؤال (within ~~2~~ 0.5 kgs)

* Error of Estimation $= Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$0.5 = 1.64 \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n} = \frac{1.64(6)}{0.5} = 19.68$$

$$n = 387.3$$

$$n \simeq 387 \quad \#$$

* إذن $\bar{x}$ مابتهمني كم..
↳ يعني الـ within كم بسمح لنفسي أبعد عن الـ $\bar{x}$ .. (مقدار الخطأ المتروك)

* في السؤال السابق .. لو كبرت الثقة .. حجم العينة راح تكبر.

لو

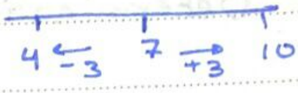
ex نفس السؤال السابق.

by 90% C.I of length 0.5 . (بدل within 0.5)

length 0.5

$\hookrightarrow$ So Error of estimation $= \frac{0.5}{2} = 0.25$

ex $7 \pm \overset{\text{error}}{③}$



$\hookrightarrow 0.25 = \frac{(1.64)(6)}{\sqrt{n}}$

← طول الفترة 6

(ضعف ال error of estimation)

(6.4) Concepts of Hypothesis ~~Testing~~ Testing :

فرضيات

* راح نطبق هذا السيكشن في الشابتر القادم (Ch 7).

رمزه $[H_0]$

① Null Hypothesis : is a statement about a population parameter that is assumed to be true until it is declared false.

(بنفرضه انو صح) حتى يتوضح انو خطأ.

② The Alternative Hypothesis $[H_1]$: is a statement about a population parameter that will be true if the null Hypothesis (H_0) is false.

③ Type one error ⇒ occurs when rejecting a true (H_0)

$$\left[\underset{\text{significance level}}{\alpha} = \underset{\text{propability}}{P}(\text{reject } H_0 \mid H_0 \text{ is true})\right]$$

مش مطلوب ④ Type two error ⇒ $(\beta) = \ldots\ldots$

مش مطلوبين
- (6.5) calculatings the probability of Type I error & Type II errors
- (6.6) calculatings the P- value
- (6.7)

* population parameter $\xrightarrow{\text{ممكن يكون}}$ μ or σ^2 or p

* هاي الفرضية إنو هو حالة متواجدة من هدول (μ , σ^2 , p)

H_0 ← بنفترضها إنها صح حتى يتوضح إنو خطأ

H_1 ← الحالة بين إيدي راح تعتبر صحيحة ~~حتى يتوضح~~ لانها إذا كانت خطأ.

* Type I error إنو إنك ترفض الـ H_0 مع إنها true (يعني هذا شرط)

(reject H_0 | H_0 is true)

احتمال الـ Type I error هو إلي بنسميه (α)

[The End of the Chapter]

* Inference about a single Population:

(7.1) Inference about a population mean:

سؤال كتاب بس ارقام غير
ex The mean cholesterol levels in a general population are normally distributed. A sample of 9 persons is taken and showed mean 210 mg/dl and standard deviation S=16 mg/dl.

ⓐ Give a 90% C.I. for the population mean.

- Popul. : Normal
- Sample : $n=9$, $\bar{x}=210$, $S=16$

ⓐ . $(1-\alpha)$ 100% C.I for μ

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

. 90% C.I for μ

$\alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$\bar{x} \pm t_{0.05}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 210 \pm \underset{\text{من الجدول}}{(1.860)}\left(\frac{16}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= 210 \pm 9.92$$

$$= (210 - 9.92,\ 210 + 9.92)$$

$$= (200.08,\ 219.92)$$

* لازم اقرر هل استعمل ال Z ام t

① Is the population Normal? yes

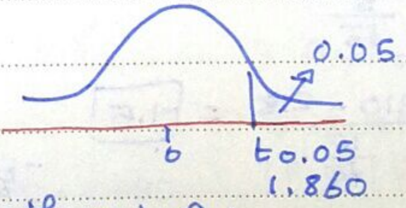
② Is the population varience? yes
is unknown

③ Is n small? yess

$\Rightarrow$ So t-dist.

* يعني لازم استخدم ال t بدل ال Z

* و سنستخدم ال S بدل σ



$df = n-1 = 9-1 = 8$

(b) Test at (5% significance level that) the mean cholesterol level is less than 218 mg/dl.

α

خطوة ① $H_0: \mu \geq 218$ ← بس بنكتبها ساوي ($\mu = 218$) ↓ لأنه أنا مقتنع بالأقل .. فإني حتى المساواة ماراح أوصلها .. عشان هيك هاي صح كمان

$H_1: \mu < 218$ } at $\alpha = 0.05$

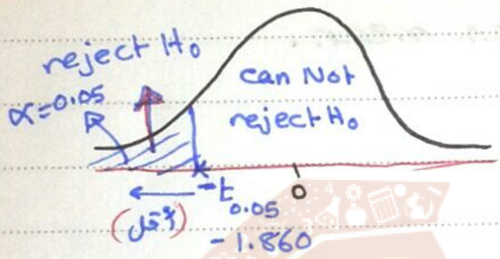
H_1 : هو هدفنا من الدراسة.

H_0 : متممتها.

خطوة ② Rejection Region : منطقة الرفض.

* μ ($<$) 218 ← أقل يعني جهة اليسار (منطقة الرفض)

* ← منطقة الرفض يعني بدي أرفض الـ H_0



df = 8

* لما أحكي Can Not reject H_0 مش معناها accept. وبنفس الوقت مش reject

* ما دام الفرع السابق (لنفس الـ df) = 1.860 ← إذن ؟

← دائمًا * مساحة منطقة الرفض (α)

* هاي الـ (−1.860) بتفصل بين الرفض والـ Not reject فبنسميها (نقطة حرجة critical point

* إذا الـ test stastic دخل جوا .. معناها راح أرفض.

∴ Rejection Region : $t < -1.860$ ↓ or test stastic < -1.860

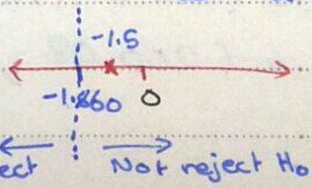
③ Test statistic : العلامة المعيارية.

* في الامتحان بسألني في السؤال ما هو الـ reject region والـ test stastic يعني السؤال ماراح يتعدى الموجود هون.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{210 - 218}{\frac{16}{\sqrt{9}}} = \boxed{-1.5}$$

* هاد الرقم وجوده على خط الأعداد على يمين $-t_{0.05}$ في منطقة Not reject H_0



∴ So, Can Not reject H_0

ⓒ Test at 10% significance level that μ is less than 218 mg/dl.

① $H_0 : \mu = 218$
$H_1 : \mu < 218$ } at $\alpha = 0.10$

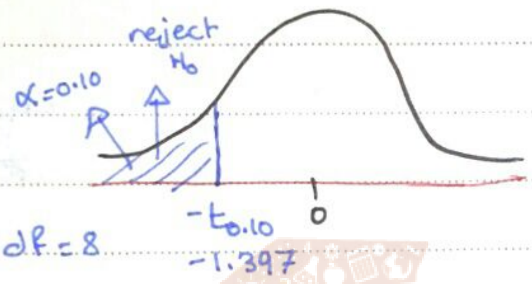
* الخطوة الأولى والثالثة

ماراح يتغيروا..

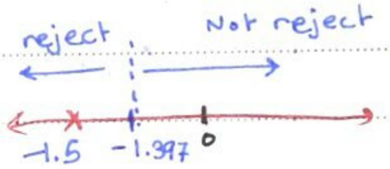
* بس ال rejection

الي بتتغير.

② **Rejection Rejion:**



$\Rightarrow$ ∴ Rej. reg. : $t < -1.397$
or test stastic < -1.397



③ Test statistic:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{210 - 218}{\frac{16}{\sqrt{9}}} = -1.5$$

* هادالرقم حيوا المنطقة

$\Rightarrow$ reject H_0

(في فرع (d) بسأل عن ال p-value ← مش مطلوبة).

Ⓠ A sample of 100 persons has a mean monthly salary 400 JD and std. dev. 64 JD

- Population : Nothing
- Sample : $n = 100$, $\bar{x} = 400$, $s = 64$.

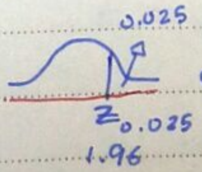
(a) Find 95% C.I. for the population mean ?

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ
- $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
- 95% C.I for μ — $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$
- $\bar{x} \pm Z_{0.025} \left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

$= 400 \pm 1.96 \left(\frac{64}{\sqrt{100}}\right)$
$= 400 \pm 12.544$
$= (400 - 12.544 , 400 + 12.544)$
$= (387.456 , 412.544)$

مادام Z و 95%

إذن المفروض يطلع 1.96



* هل السؤال t أم Z ؟

① Population Normal? No

له مادام ماحكالنا إذن No

← صح إنو اختل بس على central limil theorem

إذا حجم العينة كبير:-

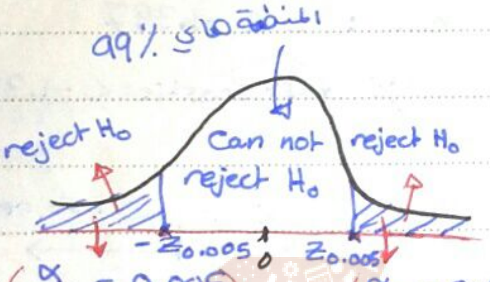
مابهمني شو ال population

إذن بستعمل ال Z.

(b) Test at 1% significance level that the population mean monthly salary is different from 410 ?

① $H_0 : \mu = 410$
$H_1 : \mu \neq 410$ } at $\alpha = 0.01$

مهمة
فكرة
② Rejection Region:



$(\frac{\alpha}{2} = 0.005)$ $(\frac{\alpha}{2} = 0.005)$

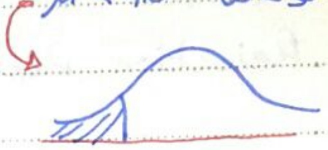
- $Z_{0.005} = 2.57$
- $-Z_{0.005} = -2.57$

∴ Rej. Reg. : $Z < -2.57$ or $Z \geq 2.57$

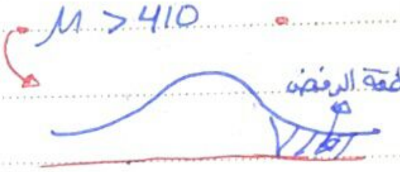
$|Z| > 2.57$

mean → test ~~statistic~~ statistic < -2.57 or Test statistic > 2.57

- لو كانت $\mu < 410$



- $\mu > 410$



- $\mu \neq 410$

mean → $\mu < 410$ or $\mu > 410$

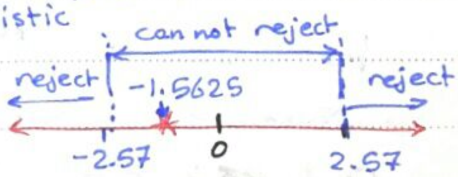
* هون منطقة الرفض تجزئة إلى منطقتين

ف α تتجزأ إلى المنطقتين.
(مساحة منطقة الرفض كلها)

③ Test statistic:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{400-410}{\frac{64}{\sqrt{100}}} = -1.5625$$

⇒ can not reject H_0



Subject:.......................   /   /

(Assume that the popul. is normally distributed)

New

ex (7.1.3) A company claims that the population mean is not more than 3. A random sample of 20 persons showed the following Data

تدعي

[2.50   3.25 .... 3.20]

- يوجد سوفتوير (برنامج).
الشركة تدعي إنو الوسط الحسابي للتعلم عليه لا يتعدى 3 ساعات.

احنا لازم نطلع

$* \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2.50 + 3.25 + \cdots + 3.20}{20}$

$= \boxed{3.23}$

$* S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \boxed{0.51}$

Test at 5% significance level if the company claim is true.?

- لأنه الشركة تدعي
إذن اصحابنا راح يكون
عكس الإدعاء.

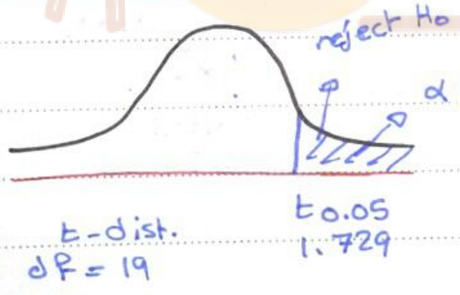
① $H_0: \mu = 3$

$H_1: \mu > 3$ at $\alpha = 0.05$

claim → $\mu \leq 3$

عكس → $\mu > 3$

② Rej. Reg.:



- هون الـ t ما راح تزبط
لأنه الـ population isn't Normal

- لكن لا حجم العينة كبير
ولا الـ population هو Normal
عشان أستعمل الـ Z
← مفشان هاي القصص.. ضفنا
الجملة إنو نعتبرها Normal
فراح أستعمل الـ t

③ Test statistic:

$* \mu = 3$ $* \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2.50 + 3.25 \ldots + 3.20}{20}$

$= \boxed{3.23}$

$* S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \boxed{0.51}$

$* t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

$= \frac{3.23 - 3}{\frac{0.51}{\sqrt{20}}} = 2.02$ ⇒ reject H_0

→ reject H_0 → يعني أرفض
يعني إدعاها ~~[illegible]~~ غلط

S   T   A   R   S Notebook

Subject: .... / /

(7.2) Inference about apopulation proportion (p) :

هذا الدرس مافي تمييز في ال Normal مافي خيار ثاني.

ex It was believed in the arab world that 60% of persons are smokers. During the year 2000, asample of 400 persons showed 250 smokers.

نسبة النجاح في العينة راح تكون نسبة المدخنين.

- Population : ??
- Sample : $n=400$, $\overset{\text{smokers}}{x}=250 \Longrightarrow \hat{p}=\frac{x}{n}=\frac{250}{400}$

$\hat{p}=0.625$

(a) Construct a 99% C.I for the ~~populat~~ proportion of smokers?

- $(1-\alpha)$ % C.I for p

$$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

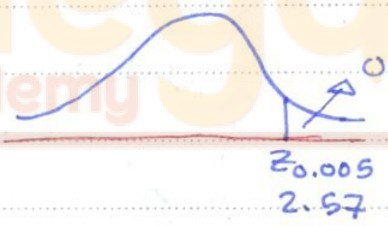
- $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

$$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

- $$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\alpha = 0.01 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$



- 99% C.I for p

$$\hat{p} \pm Z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$= 0.625 \pm 2.57 \sqrt{\frac{(0.625)(0.375)}{400}}$

$= 0.625 \pm 0.062$

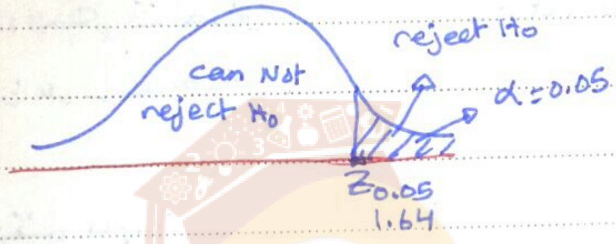
- $(0.625 - 0.062, 0.625 + 0.062)$

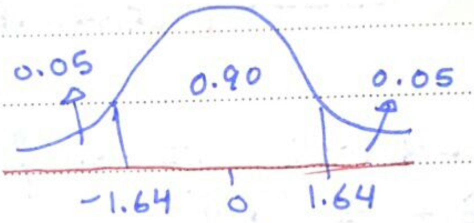
Subject:...................... / /

(b) Can we conclude that the proportion of smokers is more than 60%. Use $\alpha = 0.05$

① $H_0 : p = 0.60$
$H_1 : \hat{p} > 0.60$ at $\alpha = 0.05$

② Rejection Region:





⇒ Rejection Reg. : $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{test stastic}}}{Z} > 1.64$

test stastic > 1.64

③ Test statistic:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

$$= \frac{0.625 - 0.60}{\sqrt{\frac{(0.60)(0.40)}{400}}} = 1.02$$

⇒ Can't reject H_0

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

* هونا ال p معروفة
عشان هيك ماستعملنا
$\hat{p}\ \hat{q}$

ex we want to estimate the population proportion by using a 90% C.I. with error of estimation 0.05. Find a suitable sample size in the following cases.

لازم سيأل عن ما أقل عدد مناسب للدراسة (the smallest number of sample size)

(a) From a previous study we know that the population proportion is 0.3. $= \hat{p}$

في عندي population وبدي أشوف نسبة النجاح في هذا ال population

* $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

$$\bar{x} \pm \underbrace{Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}_{\text{Error of estimation}}$$

* هذا الحكي نفسه انعمل لكن على الوسط الحسابي.

Here * $(1-\alpha)100\%$ C.I for $\hat{p}$

$$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

* نفس المبدأ ←

$$\left[\text{Error of estimation} = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]$$

$$\rightarrow 0.05 = Z_{0.05}\sqrt{\frac{(0.3)(0.7)}{n}}$$

$$[90\% \rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05]$$

$$\rightarrow \sqrt{n} = \frac{(1.64)\sqrt{(0.3)(0.7)}}{0.05} = 15.03$$

$$n = 225.9 \rightarrow n \simeq 226. \#$$

بس لأنه ال P معروفة من دراسة سابقة استعملت بدون (^)

* ولأنه فوق σ من ال popul في error كمان لازم تكون من ال popul.

* 0.5 بتعطيني أكبر عدد من الأشخاص. وما دامه أكبر عدد إذن بتزبط للأشياء التانية

* الفكرة في الفرع الثاني إنو ما عندي معلومات سابقة عن نسبة النجاح في المجتمع

(b) No prior information about the population proportion.

$$\text{No prior} \xrightarrow{\text{بستعمل}} p = 0.5$$

على قانون ال Error

$$0.05 = 1.64\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{1.64\sqrt{(0.5)(0.5)}}{0.05} = 16.4$$

$$n = 268.96 \rightarrow n \simeq 269 \#$$

* ليش استعملنا النص (0.5) ؟!

لأنو لو أخذنا ال ← $p \times q = 0.3 \times 0.7 = 0.21$

$0.24 = 0.4 \times 0.6$

$0.25 = 0.5 \times 0.5$

* ف (0.5)(0.5) هي إلي بتعطيني أكبر قيمة..

ف العدد (269) هو عدد من الأشخاص مناسب للنص .. فهو مناسب للذي أتى قبلي .. لأنه أكبر رقم

* هذا العدد (269) بناسب ال (0.3) لأنه أكبر من رقم (226).

(7.3) Inference about a population varience (σ^2) :

هذاالرمز
χ^2
Chi-sqaure

ex (7.3.1) Quality control engineer whishes to study the weight variation of anew product. A sample of 10 items showed $\bar{x} = 0.6$ kgs and $s = 0.4$ kgs.
Assuming that the distribution of the weights is normally distributed.

- Population : Normal
- sample : $n = 10$, $\bar{x} = 0.6$, $S = 0.4$

(a) Find a 90% C.I. for the varience of the items.

إذا بدي . $(1-\alpha)100\%$ C.I for σ^2

احنا هون مهتمين بال variantion (التشتت)

الحفظ والبصم . $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$

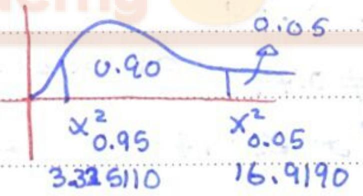
في الكتاب حاطط في المقام (n-1) وقصده فيها df .

- 90% C.I for σ^2 . $\alpha = 0.10$. $\frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95}}\right)$$

من الجدول

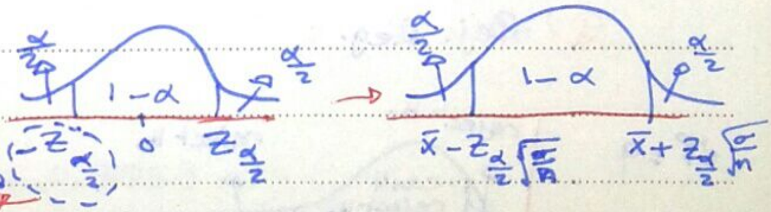
$$\left(\frac{(10-1)(0.4)^2}{16.9190}, \frac{(10-1)(0.4)^2}{3.325110}\right) \#$$



df = n-1
= 10-1 = 9

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

$$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

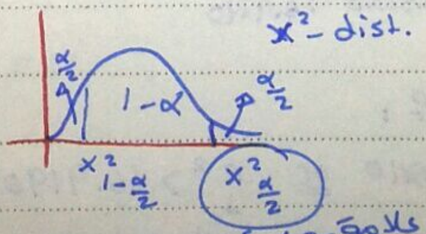


هاي العلامة المعيارية

$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ لما بدي ارجعها للخام بتطلع

- $(1-\alpha)100\%$ C.I. for σ^2

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$



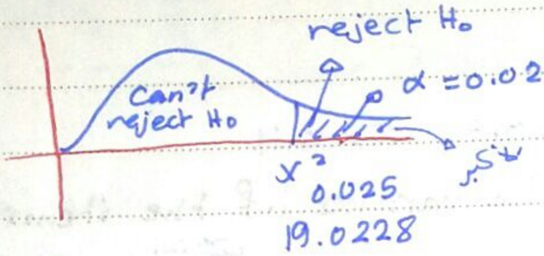
- $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$. ← علامة معيارية و برجعها للخام

(b) Using $\alpha = \overset{0.025}{\cancel{0.05}}$ we want to test that the population varience is greater than 0.5.

① $H_0 : \sigma^2 = 0.5$

$H_1 : \sigma^2 > 0.5$ at $\alpha = 0.025$

② Rejection Region :



$df = n - 1 = 9$

$\Rightarrow$ rejection. Reg : $\chi^2 > 19.0228$

$\downarrow$

test statistic > 19.0228

③ Test statistic :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)(0.4)^2}{(0.5)} = 2.88$$

ما بتربع لانه $\sigma^2 = 0.5$ وليس $\sigma = 0.5$ $\Rightarrow$ can't reject H_0

(c) $H_0 : \sigma = 0.74$

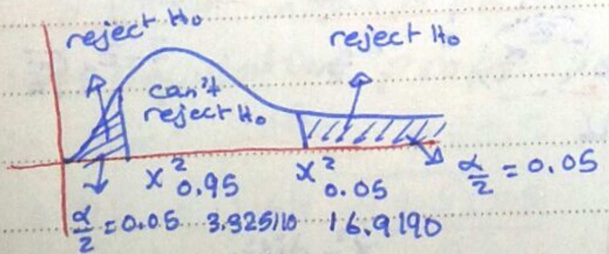
① $H_1 : \sigma \neq 0.74$ at $\alpha = 0.10$

$\updownarrow$

$\sigma < 0.74$ or $\sigma > 0.74$

② Rej. Reg :

$df = 9$



reject H_0 if :

$\chi^2 < 3.325110$ or $\chi^2 > 16.9190$

$\downarrow$ test statistic $\downarrow$ test statistic

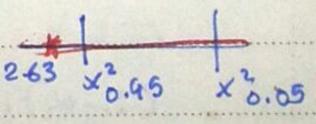
مابنفع استعمال (تقريب) اطلاقا

③ Test statistic :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)(0.4)^2}{(0.74)^2}$$

$= 2.63$

$\Rightarrow$ reject H_0

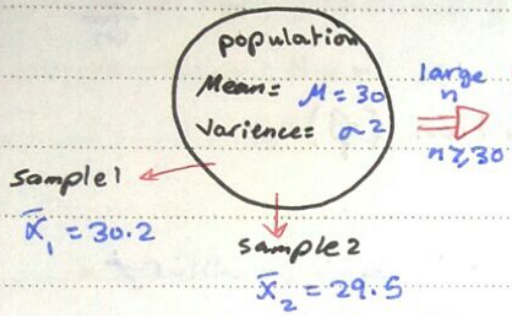


Subject: مراجعة مادة الفاينال.   /   /

* (4.3) Central Limit Theorem

*(5.1) The Distribution of the sample mean (Dist. of $\bar{x}$)

* هذول السكشنين مرتبطات بالأفكار...



$\left[\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right]$

* مادام الوسط الحسابي بتغير من مرة لمرة

إذن لازم يكون إله توزيع.

* في central limit .. لما تكون العينة كبيرة بكون توزيع $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ex The weights of students in apopulation are normally distributed with mean 60 kgs and std. dev. 7 kgs.

① If a student is selected randomly, find the probability that his weight is more than 62 kgs.

② If a sample of 100 students is chosen. find the prob. that the sample mean is more than 62 kgs.

$\underbrace{\text{sample mean}}_{\bar{x}}$

** قبل بدء الحل .. لازم أقرر إذا بدي أتعامل مع t or z

* الـ x وزن طالب في هذا المجتمع

① . X = the student weight

. $X \sim N(\underset{60}{\mu}, \underset{(7)^2}{\sigma^2})$

* $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{62-60}{7} = 0.286 \simeq 0.29$

. $p(x > 62) = p(Z > 0.29)$

$= p(Z < -0.29) = 0.3859$

② . $p(\bar{x} > 62)$

* مادام حجم العينة كبير..

مابهمني شو طبيعة الpopulation

. $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

. $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{62-60}{\frac{7}{\sqrt{100}}} = ~~\text{=}~~ 2.86$

So ⇒ $= p(Z > 2.86) = ----$

① Is the population normal? → yes
② Is the population varience σ^2 unknown? → yes
③ Is the sample size small $(n<30)$? → yes

} إذا الثلاث yes
(t-distributed)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

(5.3) The Distribution of the sample Proportion $(\hat{p})$:-

(large sample): $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

* في هذا الدرس فقط توزيع واحد.
* لازم الأسئلة تكون large n

ex $P(\hat{p} > 0.15) = P(Z > \square)$

ط احتمال إنو نسبة النجاح في العينة تتعدى ال 0.15

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \square$$

حالة ① * $X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

حالة ② * $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \longrightarrow Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

حالة ③ * $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \longrightarrow Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$

في الثلاث حالات باخذ العلاقة الخام وكلهم ناقص، وكلهم بقسم على الانحراف المعياري (الجذر)

Subject:…………………… / /

(5.2) The Distribution of the sample varience (s^2) :

! في هذا الدرس ما في Normal
بس بستخدم x^2 chi-sqaure

المشاهدة الأولى

ex $x_1, x_2, \ldots, x_{12} \sim N(\mu, \sigma^2 = 15)$

find the probability that the sample varience is more than 16.

$P(s^2 > 16)$

$x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(12-1)16}{15} = \boxed{} = 11.73$

* طاراح الاقي في الجدول
لأنه مثال من عقل الدكتور XD

$P(x^2 > \boxed{}) = \ldots\ldots$

* Confidence Intervals : (chapter 6)   فترات الثقة.

~~(1-α)100% C.I for μ~~

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

Normal (t أو Z هون)

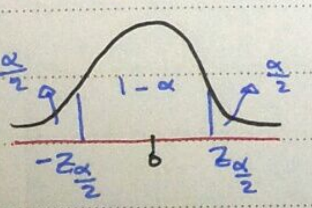
* المعلومة إلي في ال sample

هي ال point estimator $(\bar{x})$

- على اعتبار إلي هون هو (Z)
- إذا ال σ مش معروفة بستخدم S.

$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\downarrow$ or $(t_{\frac{\alpha}{2}})$



↳ $\bar{x} - N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for p

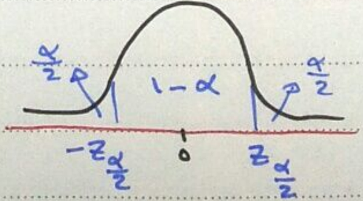
Normal (هون Z فقط.)

- المعلومة إلي في ال sample

هي ال point estimater $(\hat{p})$

- لأنه ال p هون مش معروفة
فبروح بستخدم $\hat{p}$

$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

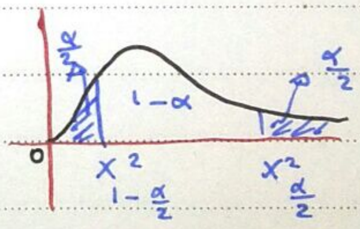


↳ $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

- $(1-\alpha)100\%$ C.I for σ^2

(x^2 هون)

- $\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$



x^2- dist.

- $x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

Subject:...................... / /

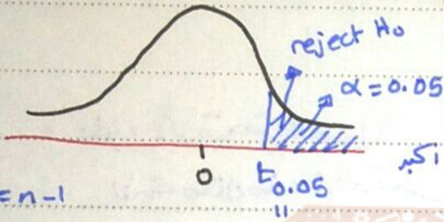
$(1-\alpha)100\%$ C.I for μ

① $H_0 : \mu = 60$

$H_1 : \mu > 60$ at $\alpha = 0.05$

(بدي افرض من عندي ! نو t)

② Rejection Region



df=n-1

$t_{0.05} = \square$

→ reject H_0 if $t > \square$

③ Test statistic

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \triangle$$

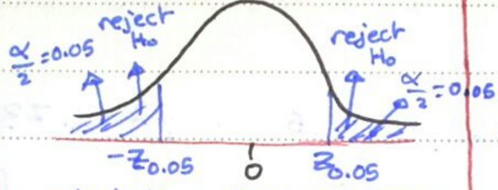
$(1-\alpha)100\%$ C.I for p

① $H_0 : p = 0.35$

$H_1 : p \neq 0.35$ at $\alpha = 0.10$

(ما عندي خيار غير Z)

② Rejection Region



- التنتين مع بعض ← reject H_0
- التنتين مع بعض = $\alpha = 0.10$
- لأنه Normal ← راح يضل بالوسط 0.90

$Z_{0.05} = 1.64$ / $-Z_{0.05} = -1.64$

→ reject H_0 if $Z < -1.64$ or $Z > 1.64$

③ Test statistic

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \triangle$$

هون p معروفة.

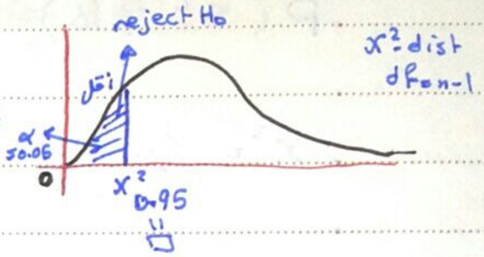
$(1-\alpha)100\%$ C.I for σ^2

① $H_0 : \sigma^2 = 0.4$

$H_1 : \sigma^2 < 0.4$ at $\alpha = 0.05$

(هون X^2)

② Rejection Region



$X^2_{0.95} = \square$

→ Reject H_0 if $X^2 < \square$

③ Test statistic

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \triangle$$